范畴论

贺伟 著



科学出版社
www.sciencep.com

范 畴 论

贺 伟 著



科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是一本关于范畴论的基本内容和方法，同时介绍现代范畴论的一些最新发展的书籍. 本书的前 3 章是范畴论的基础内容，包括范畴与函子、极限理论、函子的伴随性与模结构；第 4 章和第 5 章分别介绍了加法范畴、Abel 范畴及层范畴等内容. 书中使用的是现代范畴论通用的概念和术语，但是在对一些基本概念和理论的处理过程中，尝试使用比较简洁的方法，避免繁琐的论述.

本书适合数学或计算机专业的高年级本科生和研究生及与范畴论有关的科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

范畴论/贺伟著.—北京：科学出版社，2006

ISBN 7-03-017096-2

I. 范… II. 贺… III. 范畴论 IV. O154.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 028788 号

责任编辑：张 扬 贾瑞娜 / 责任校对：张 琪
责任印制：安春生 / 封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

西源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2006 年 7 月第一次印刷 印张：7 1/2
印数：1—2 500 字数：134 000

定价：22.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前 言

范畴论产生于 20 世纪 40 年代对同调代数的研究. 1942 年, Eilenberg 和 Macl-ane 引入了范畴、函子和自然变换的概念用来描述某些“自然”同构的概念, 但是这个时期范畴论仅仅被作为研究同调代数的一种方法, 还没有发展成为一门独立的学科. 1956 年, Cartan 与 Eilenberg 的著作《同调代数》使人们意识到许多关于模的有限图表的命题其实在一般的范畴中仍然成立, 并且由对偶原理这些命题的对偶命题仍然成立. 1955 年, Buchsbaum 关于 Abel 范畴的研究 [6] 和随后 Grothendieck 的论文 [18] 标志着范畴论作为一门独立的学科开始得到迅速的发展. 现在范畴论已经发展成为一门具有广泛应用的新理论. 在现代数学研究中, 范畴论为日趋多样的数学分支以及各个分支之间多样化的联系提供了一种统一的简洁的“符号语言”, 目前已经在代数学、拓扑学、代数几何学等领域有着深刻的应用. 在逻辑学中, 以范畴论为基础的 Topos 理论正在发展成为现代数学全新的统一的基础. 在理论计算机科学研究中, 范畴论在函数程序指令、程序语义学和程序逻辑学等领域有着广泛的应用.

本书的目的是给读者提供一本关于范畴论的基本内容和方法的基础读物, 同时能够介绍现代范畴论的一些最新发展. 作者在书中使用的是现代范畴论通用的概念和术语, 但是在对一些基本概念和理论的处理过程中, 作者尝试使用比较简洁直接的方法, 避免烦琐的论述, 希望能够对初学者产生好的效果. 本书的前 3 章是范畴论的基础内容, 适合高年级本科生和研究生的教学以及科研人员对范畴论基础知识的需要, 第 4 章可供从事代数拓扑学尤其是同调代数研究的研究生和科研人员学习和参考, 第 5 章既可以为从事代数几何的科研人员参考, 同时也可为希望进一步学习 Topos 理论的读者提供层论方面的预备知识.

本书的初稿是作者于 2004 年 9 月至 2005 年 9 月在英国剑桥大学数学中心访问期间完成的, 作者感谢 Peter Johnstone 教授的邀请, 感谢他在本书写作过程中所提供的热情帮助和有益的建议. 作者同时要感谢四川大学刘应明院士多年来的鼓励和教诲, 感谢罗懋康教授多年来的帮助, 感谢张德学教授提出的有益建议. 本书的初稿曾在南京师范大学数学系拓扑学专业 04 级和 05 级的硕士生和博士生中试讲, 听讲的研究生认真发现了许多打印错误, 并提出了一些文字修改意见, 卢涛同志绘制了全书的插图, 作者在此表示感谢. 由于本书是第一本中文版的范畴论读物, 许多名词的中文翻译也是第一次出现, 希望读者能够提出批评意见以便进一步改进. 由于作者的水平有限, 书中难免会有失误和不足, 诚挚希望国内同仁和广大读者批评指正.

作 者

2006 年 4 月于南京师范大学

符 号 说 明

$\mathrm{ob}\mathcal{C}$	范畴 $\mathcal{C}$ 的全体对象
$\mathcal{C}(A,B)$	对象 A 到 B 的态射集
$\mathrm{Mor}\mathcal{C}$	范畴 $\mathcal{C}$ 的全体态射
$\mathrm{dom}(f)$	态射 f 的定义域
$\mathrm{cod}(f)$	态射 f 的值域
1_A	对象 A 到自身的单位态射
$1_{\mathcal{C}}$	范畴 $\mathcal{C}$ 到自身的单位函子
Set	集合范畴
Gp	群范畴
AbGp	Abel 群范畴
Rng	环范畴
$\mathrm{Mod}_{\mathrm{R}}$	R 模范畴
Top	拓扑空间范畴
Haus	Hausdoff 拓扑空间范畴
TopGp	拓扑群范畴
Diff	可微流形范畴
Htop	拓扑同伦范畴
Top^*	点拓扑空间范畴
Rel	关系范畴
$\mathrm{Mat}_{\mathrm{R}}$	实数域上的矩阵范畴
Poset	偏序集构成的范畴
Frm	frame 范畴
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$	范畴 $\mathcal{C}$ 的对偶范畴
$\mathcal{C}/B$	B 上的切片范畴
$B/\mathcal{C}$	B 下的余切片范畴
Cat	小范畴构成的范畴
$[\mathcal{C},\mathcal{D}]$	范畴 $\mathcal{C}$ 到范畴 $\mathcal{D}$ 的函子范畴
$\mathcal{C}(A,-)$	关于 A 的态射函子
$\mathcal{C}(-,B)$	关于 B 的反变态射函子
$\mathrm{Sub}(B)$	B 的子对象族
$\mathrm{Quot}(A)$	A 的商对象族

Met	度量空间范畴
Idem	幂等算子范畴
Tors	扭群范畴
ATop	Alexandroff 拓扑空间范畴
SmGp	半群范畴
B^A	幂对象
UPS	完备格和保持定向上确界映射的范畴
$\ker(f)$	态射 f 的核
$\mathrm{coker}(f)$	态射 f 的余核
$A \oplus B$	对象 A 与 B 的双积
$\mathrm{im}(f)$	态射 f 的像
$\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$	范畴 $\mathcal{C}$ 上的 $\mathbb{T}$ 代数范畴
Top_0	T_0 拓扑空间范畴
Tych	Tychonoff 拓扑空间范畴
$\Delta \downarrow D$	D 上的锥形范畴
$\Delta \uparrow D$	D 上的余锥形范畴
$e: A \times B^A \to B$	计值态射
$\mathrm{coim}(f)$	态射 f 的余像
$a \in^* A$	a 是 A 的伪元素
$a =^* a'$	a 与 a' 伪相等
$\Gamma(X)$	拓扑空间 X 上的开集格
$t\|_V$	t 在 V 上的限制
$\mathrm{Sh}(X)$	拓扑空间 X 上的层范畴
LH	拓扑空间与局部同胚映射范畴
Ω	子对象分类子
f_*	由 f 确定的定向层函子
f^*	由 f 确定的逆向层函子
$\mathrm{Sub}_{\mathrm{Sh}(X)}(1)$	常值层 1 在层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的子对象集
$A \downarrow G$	函子 $G: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 和对象 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 确定的态射范畴
$(F \dashv G): \mathcal{A} \to \mathcal{B}$	F 与 G 是一对伴随函子
$F(V \subseteq U): F(U) \to F(V)$	限制映射
$(F, G, \eta, \varepsilon): \mathcal{A} \to \mathcal{B}$	F 与 G 是一对伴随函子使得 $\eta: 1_{\mathcal{A}} \to GF$ 是伴随单位, $\varepsilon: FG \to 1_{\mathcal{B}}$ 是伴随的余单位
$(\mathcal{C}, J)$	范畴 $\mathcal{C}$ 赋予 Grothendieck 拓扑 J 的场

目　录



第 1 章　范畴与函子

1.1　范畴的定义

现代数学许多领域的研究都可以概括为对特定的数学对象及这些对象之间的映射的研究. 例如, 集合及集合之间的映射是集合论研究的主要对象, 群 (或环) 和群同态 (或环同态) 构成了群论 (或环论) 的主要研究对象, 拓扑空间及拓扑空间之间的连续映射构成了拓扑学的主要研究对象, 等等. 范畴的概念正是这些特定的数学对象和映射的概括和抽象.

定义 1.1.1　一个**范畴**(category)$\mathcal{C}$ 是由:

(1) 一族对象 (object)ob$\mathcal{C}$.

(2) 任意一对对象 A, B, 对应一个集合 $\mathcal{C}(A,B)$, 其元素称为 **态射** (morphism), 使得当 $A \neq A'$ 或者 $B \neq B'$ 时, $\mathcal{C}(A,B)$ 与 $\mathcal{C}(A',B')$ 不交.

组成, 满足下面条件:

(a) 复合运算律 (composition law): 若 $A, B, C \in \text{ob}\mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}(A,B)$, $g \in \mathcal{C}(B,C)$, 则存在唯一的 $gf \in \mathcal{C}(A,C)$, 称为 f 与 g 的复合.

(b) 结合律 (associativity): 若 $A, B, C, D \in \text{ob}\mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}(A,B)$, $g \in \mathcal{C}(B,C)$, $h \in \mathcal{C}(C,D)$, 则有

$$h(gf) = (hg)f.$$

(c) 单位态射 (identity morphism): 每一个对象 A, 存在一个态射 $1_A \in \mathcal{C}(A,A)$ 使得对任意的 $f \in \mathcal{C}(A,B)$ 及 $g \in \mathcal{C}(C,A)$ 有

$$f1_A = f, \qquad 1_A g = g.$$

关于范畴的定义在一些文献中有着不同的表达形式. 一些文献中的范畴定义不要求任意两个对象之间的态射的全体是一个集合, 这样做主要是出于逻辑上的考虑 (不用预设任何集论模型). 但是作者认为从应用的角度来考虑, 我们的定义是恰当的.

在看一些范畴的例子之前, 我们先做一些记号上的约定. 我们用花体字母如 $\mathcal{D}, \mathcal{C}$ 等表示范畴, 范畴中的对象用大写英文字母表示而态射用小写英文字母或小写希腊字母表示. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, $\mathcal{C}$ 的态射的全体记作 Mor$\mathcal{C}$.

若 $A, B \in \text{ob}\mathcal{C}, f \in \mathcal{C}(A,B)$, 类似于习惯上对映射的表示, 我们用一个箭头表示为 $f: A \to B$, 称 A 是 f 的定义域, B 为 f 的值域, 记作 $\text{dom}(f) = A, \text{cod}(f) = B$.

下面的一些范畴例子, 我们只给出对象和态射, 读者可以容易验证其满足范畴定义的条件.

例 1.1.2　集合范畴 Set(在某个给定的集合论模型中), 其对象为集合, 态射为映射.

例 1.1.3　群范畴 Gp, 其对象为群, 态射为群同态. 类似地我们有 Abel 群范畴 AbGp, 环范畴 Rng 和 R 模范畴 $\mathrm{Mod_R}$.

例 1.1.4　拓扑空间范畴 Top, 其对象为拓扑空间, 态射为连续映射. 类似地有拓扑群范畴 TopGp, 其对象为拓扑群, 态射为连续的群同态. 可微流形为对象光滑映射为态射的范畴 Diff.

例 1.1.5　拓扑空间同伦范畴 Htop, 其对象为拓扑空间, 态射为连续映射的同伦等价类.

例 1.1.6　点拓扑空间范畴 Top*, 其对象为序对 (X,x), 其中 X 是非空拓扑空间, $x\in X$, 态射为保点连续映射 ($f:(X,x)\to(Y,y)$ 称为一个保点连续映射当且仅当 $f:X\to Y$ 是连续映射并且满足 $f(x)=y$).

例 1.1.7　设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴. 以 $\mathcal{C}$ 的对象为对象, 以 $\mathcal{C}$ 的态射的反向为态射形成一个新范畴, 称为 $\mathcal{C}$ 的对偶, 记作 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\big($即 $f\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(A,B)$ 当且仅当 $f\in\mathcal{C}(B,A)\big)$.

设 P 是一个关于范畴 $\mathcal{A}$ 的命题, 即命题 P 的条件和结论都是由范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象和态射构成. 如果将命题 P 中所有的态射反向, 则我们可以得到一个新的命题 P^*, 称之为命题 P 的对偶命题. 容易看出命题 P 关于范畴 $\mathcal{A}$ 成立当且仅当对偶命题 P^* 关于范畴 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 成立. 注意到对任意范畴 $\mathcal{A}$ 都有 $(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}=\mathcal{A}$ 成立, 我们有下面的对偶原理.

对偶原理 (duality principle)　设 P 是一个关于所有范畴的真命题, 则将命题 P 中所有的态射反向得到的新命题 P^* 也是一个关于所有范畴的真命题.

对范畴论中的任意一个命题 P, 我们有 $(P^*)^*=P$ 成立, 由对偶原理可知, 命题 P 成立当且仅当其对偶命题 P^* 成立. 因此对于范畴论中的任意一对对偶命题, 我们只需要证明其中一个命题成立, 另一个即成立.

例 1.1.8　设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, $B\in\mathrm{ob}\mathcal{C}$. 考虑 $\mathcal{C}$ 中以 B 为值域的态射 $f:A\to B$, 记作 (A,f). 我们可以构造一个以所有的 (A,f) 为对象的新范畴使得任意两个以 B 为值域的态射 $f:A\to B$ 和 $g:C\to B$, 态射 $h:(A,f)\to(C,g)$ 是指 $\mathcal{C}$ 中的态射 $h:A\to C$ 使得 $f=gh$, 即下面的图表交换：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & C \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & B & \end{array}$$

这样得到的范畴称为 B 上的切片范畴 (slice category over B), 记作 $\mathcal{C}/B$. 对偶地我

们可以得到所谓的 B 下的余切片范畴 (coslice category under B), 记作 $B/\mathcal{C}$.

设 A, B 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个对象, $f: A \to B$. 如果存在态射 $g: B \to A$ 使得

$$gf = 1_A, \qquad fg = 1_B,$$

则称态射 f 是一个**同构**(isomorphism). 如果存在一个同构 $f: A \to B$, 则称 A 与 B 是**同构的对象**(isomorphic object). 容易验证同构是 ob$\mathcal{C}$ 上的一个等价关系.

例 1.1.9 设 $\mathcal{C}$ 是一个只有一个对象的范畴, 则 Mor$\mathcal{C}$ 在复合运算下是一个有单位元的半群. 反之设 G 是一个群, 如果将 G 自身看作唯一的对象, G 中的元素看作 G 到自身的态射, 则群 G 可以看作只有一个对象的范畴满足任意一个态射 f 都是一个同构.

例 1.1.10 关系范畴记作 Rel, 其对象是集合, 而态射 $f: X \to Y$ 是指一个二元关系 $f \subseteq X \times Y$, 态射 $f: X \to Y$ 与态射 $g: Y \to Z$ 的复合是态射 $gf = \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y, (x,y) \in f, (y,z) \in g\}: X \to Z$.

例 1.1.11 如果一个范畴中的态射都是单位态射, 则称为离散范畴. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴满足任意两个对象 A 和 B, 集合 $\mathcal{C}(A,B)$ 最多只含有一个元素, 则态射箭头在 ob$\mathcal{C}$ 上定义了一个自反的, 传递的二元关系, 即一个预序关系. 反之, 给定集合 X 以及 X 上的一个预序关系 $\leqslant$, X 可以看作一个范畴使得对任意的 $x, y \in X$, 存在态射 $x \to y$ 当且仅当 $x \leqslant y$. 特别地每个偏序集可以看作一个范畴.

例 1.1.12 考虑以所有的自然数为对象. 对任意一对自然数 m, n, 一个态射 $f: m \to n$ 是指实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个 $m \times n$ 阶矩阵 (特别地单位态射 $1_n: n \to n$ 是 n 阶单位对角矩阵), 态射的复合即矩阵的乘积. 这样形成的范畴记作 $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}$.

定义 1.1.13 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, 若范畴 $\mathcal{C}'$ 满足：

(a) ob$\mathcal{C}' \subseteq$ ob$\mathcal{C}$.

(b) $\mathcal{C}'(A,B) \subseteq \mathcal{C}(A,B)$; $A, B \in$ ob$\mathcal{C}$.

(c) $\mathcal{C}'$ 中的复合与 $\mathcal{C}$ 中的复合相同.

(d) $\mathcal{C}'$ 中的单位态射与 $\mathcal{C}$ 中的相同.

则称 $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}$ 的 **子范畴** (subcategory). 进一步, 如果对子范畴 $\mathcal{C}'$ 中的任意两个对象 A, B, 都有 $\mathcal{C}'(A,B) = \mathcal{C}(A,B)$ 成立. 则称 $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}$ 的 **满子范畴** (full subcategory).

例 1.1.14 任意范畴都有两个平凡的子范畴, 即空范畴和自身.

例 1.1.15 集合范畴 Set 是关系范畴 Rel 的子范畴, 但不是满子范畴.

例 1.1.16 Hausdorff 拓扑空间范畴 Haus 是拓扑空间范畴 Top 的满子范畴; Abel 群范畴 AbGp 是群范畴 Gp 的满子范畴; 拓扑群范畴 TopGp 是拓扑空间范畴 Top 的子范畴, 但不是满子范畴.

设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是两个范畴, 我们可以定义 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 的乘积范畴 (product category) $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 如下：

$\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 中的对象是所有的序对 (A,B) 使得 $A\in \mathrm{ob}\mathcal{C}, B\in \mathrm{ob}\mathcal{D}$, $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 的一个态射 $(f,g):(A,B)\to(A',B')$ 是一个序对 (f,g) 使得 $f:A\to A'$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射而 $g:B\to B'$ 是 $\mathcal{D}$ 中的态射. 态射的复合按逐点复合, 则不难验证 $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 是一个范畴.

如果范畴 $\mathcal{C}$ 的全体对象 $\mathrm{ob}\mathcal{C}$ 是一个集合, 则称 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴 (small category). 例 1.1.9 和例 1.1.12 中的范畴都是小范畴, 而例 1.1.2～ 例 1.1.6 都不是小范畴.

练习 1.1

1. 设 X 是一个非空集合, R 是 X 上的一个自反的, 传递的二元关系. 对任意的 $x,y\in X$, 定义

$$x\to y \Longleftrightarrow (x,y)\in R$$

证明以 X 中的元素为对象, 以上面定义的箭头为态射构成一个范畴.

2. 证明以所有的偏序集为对象, 以保序映射为态射构成一个范畴 Poset.

3. 如果一个完备格 L 满足对任意的 $a\in L$ 和 $\{a_i\mid i\in I\}\subseteq L$, 下面的分配律

$$a\wedge\bigvee_{i\in I}a_i=\bigvee_{i\in I}a\wedge a_i$$

成立, 则称 L 是一个**frame**. 若 L 与 M 是 frame, 映射 $f:L\to M$ 保持有限交和任意并, 则称 f 是一个**frame 映射**. 证明以所有的 frame 为对象, 以 frame 映射为态射构成一个范畴 Frm.

4. 一个链复形是一个由 R 模和 R 模同态构成的序列:

$$\cdots\to M_n\xrightarrow{d_n}M_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}M_{n-2}\to\cdots\to M_0\xrightarrow{d_0}M_{-1}\to\cdots$$

满足 $d_{i-1}d_i=0$ 对任意的整数 $i\in\mathbb{Z}$ 成立, 记作 $(M_i,d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. 链复形 $(M_i,d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 到链复形 $(M_i',d_i')_{i\in\mathbb{Z}}$ 的一个链复形映射 $f=(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是指一列 R 模同态 $f_i:M_i\to M_i'$, $i\in\mathbb{Z}$ 使得 $f_{i-1}d_i=d_i'f_i$ 对任意的 $i\in\mathbb{Z}$ 成立, 即下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & M_n & \xrightarrow{d_n} & M_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & M_{n-2} & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & M_0 & \xrightarrow{d_0} & M_{-1} & \longrightarrow & \cdots\\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-2}} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_{-1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & M_n' & \xrightarrow{d_n'} & M_{n-1}' & \xrightarrow{d_{n-1}'} & M_{n-2}' & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & M_0' & \xrightarrow{d_0'} & M_{-1}' & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

证明以所有的链复形为对象, 以链复形映射为态射构成一个范畴.

1.2 函　子

在范畴论中, 我们不仅关注对象, 而且更关注对象之间的对应关系. 这一节我们来介绍范畴之间的“映射”即函子.

定义 1.2.1 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是范畴. 一个**函子**(functor)$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 由两个映射组成：

$$\mathrm{ob}\mathcal{C}\to\mathrm{ob}\mathcal{D}:A\mapsto F(A),$$

$$\mathrm{Mor}\mathcal{C}\to\mathrm{Mor}\mathcal{D}:f\mapsto F(f).$$

满足 $\mathrm{dom}(F(f))=F(\mathrm{dom}(f)),\mathrm{cod}(F(f))=F(\mathrm{cod}(f)),F(1_A)=1_{F(A)}$, 并且若 $\mathrm{dom}(g)=\mathrm{cod}(f)$ 则 $F(gf)=F(g)F(f)$.

例 1.2.2 任意范畴 $\mathcal{C}$ 都存在一个到自身的单位函子 $1_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 使得在对象和态射上的对应都是恒同的.

例 1.2.3 群范畴 Gp(拓扑空间范畴 Top, 环范畴 Rng, R 模范畴 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{R}}$ 等) 存在一个到集合范畴 Set 的遗忘函子 G, 使得 G 把每个群 (拓扑空间, 环, R 模等) 对应为所在的集合, 而把每个群同态 (连续映射, 环同态, R 模同态) 对应为自己.

类似地, 我们可以定义从环范畴到群范畴的遗忘函子 Rng→Gp, 从拓扑群范畴到拓扑空间范畴的遗忘函子 TopGp→Top.

例 1.2.4 对每个集合 X, 由 X 生成的自由群 $F(X)$ 具有性质：对任意的群 G, 及映射 $f:X\to G$, f 可以唯一地扩张为一个群同态 $F(X)\to G$. 给定集合 X 到集合 Y 的一个映射 $g:X\to Y$, 我们定义 $F(g):F(X)\to F(Y)$ 为复合 $ig:X\to Y\to F(Y)$ 的唯一扩张, 其中 $i:Y\to F(Y)$ 是包含映射. 这样我们就定义了一个从集合范畴到群范畴的函子 $F:\mathrm{Set}\to\mathrm{Gp}$, 称为自由群函子.

例 1.2.5 幂集函子：定义 $P:\mathrm{Set}\to\mathrm{Set}$ 为 $P(A)=2^A$, 若 $f:A\to B$, 则 $P(f):2^A\to 2^B$ 为 $P(f)(C)=f(C)$. 同样可以定义函子 $P^*:\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Set}$ 使得 $P^*(A)=2^A$, $P^*(f)(C)=f^{-1}(C)$.

一般地, 我们称一个函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的**反变函子**(contravariant functor).

例 1.2.6 两个群 (看作范畴) 之间的函子就是群同态. 类似地两个偏序集 (看作范畴) 之间的函子就是保序映射.

例 1.2.7 设 G 是一个群, 看作只有一个对象的范畴, $F:G\to\mathrm{Set}$ 是一个函子. 则函子 F 等于给定了一个集合 $F(*)$ 以及对每个 $g\in G$, 一个双射 $F(g):F(*)\to F(*)$ 满足 $F(gh)=F(g)F(h)$. 因此函子 F 相当于给出了 G 的一个置换表示.

例 1.2.8 每个点拓扑空间 (X,x) 对应为基本群 $\pi_1(X,x)$ 确定了一个函子 $\pi_1:Top^*\to\mathrm{Gp}$.

例 1.2.9 设范畴 $\mathcal{C}'$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 的子范畴, 则有一个从 $\mathcal{C}'$ 到 $\mathcal{C}$ 的包含函子 $\mathcal{C}'\to\mathcal{C}$.

设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个函子. 如果对 $\mathcal{C}$ 中的任意一对对象 A,B 和 $f,g\in\mathcal{C}(A,B)$ 都有

$$F(f)=F(g)\Longrightarrow f=g,$$

即 F 在 $\mathcal{C}(A,B)$ 上的限制

$$\mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{D}(F(A),F(B))$$

是一个单射, 则称函子 F 是一个 **局部单的函子** (faithful functor).

如果对任意的 $g \in \mathcal{D}(F(A),F(B))$, 存在 $f \in \mathcal{C}(A,B)$ 使得 $F(f)=g$, 即 F 在 $\mathcal{C}(A,B)$ 上的限制

$$\mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{D}(F(A),F(B))$$

是一个满射, 则称 F 是一个 **局部满的函子** (full functor).

例 1.2.10　遗忘函子 $G: \mathrm{Gp} \to \mathrm{Set}$ 是局部单的但不是局部满的.

例 1.2.11　自由群函子是一个局部单同时也是局部满的函子.

例 1.2.12　设 X 是一个 T_0 拓扑空间, 我们可以在 X 上定义一个偏序关系:

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow \{x\}^- \subseteq \{y\}^-,$$

这里 $\{x\}^-$ 表示单点集 $\{x\}$ 的闭包, 记偏序集 $(X,\leqslant)$ 为 $P(X)$. 若 $f: X \to Y$ 是 T_0 拓扑空间之间的连续映射, 则不难验证 $f: P(X) \to P(Y)$ 是一个保序映射. 这样我们就定义了一个从 T_0 拓扑空间范畴 Top_0(即拓扑空间范畴 Top 中以 T_0 拓扑空间为对象的满子范畴) 到偏序集范畴 Poset 的一个局部单函子 $P: \mathrm{Top}_0 \to \mathrm{Poset}$.

例 1.2.13　任意一个包含函子都是局部单的, 而一个包含函子是局部满的当且仅当对应的子范畴是一个满子范畴.

命题 1.2.14　设 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}, G: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 是函子, 定义 $GF: \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ 使得对 $\mathcal{A}$ 中的任意一个对象 A,

$$A \mapsto G(F(A)),$$

对 $\mathcal{A}$ 中的任意一个态射 $f: A \to B$,

$$(f: A \to B) \mapsto (G(F(f)): G(F(A)) \to G(F(B))),$$

则 GF 是一个函子.

由命题 1.2.14, 我们知道函子也可以进行复合运算, 因此我们自然地想是否可以定义以所有范畴为对象, 函子为态射的范畴. 但遗憾的是一般地两个范畴之间的函子的全体未必是一个集合. 但是当我们把目光限制在所有的小范畴上时, 我们的确可以得到一个以所有小范畴为对象以小范畴之间的函子为态射的范畴 Cat.

定义 1.2.15　设 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个函子. 如果存在函子 $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 使得 $GF = 1_{\mathcal{C}}, FG = 1_{\mathcal{D}}$, 则称 F 是范畴 $\mathcal{C}$ 到范畴 $\mathcal{D}$ 的一个**同构** (isomorphism). 如果存在范畴 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的同构 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 则称范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 是**同构的**.

显然同构形成了范畴之间的一个等价关系. 如果范畴 $\mathcal{C}$ 与范畴 $\mathcal{D}$ 是同构的, $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个同构, 则 F 关于对象的映射和关于态射的映射都存在逆映射, 因此

这两个映射都是一一到上的. 反之如果 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个局部单且局部满的函子同时 F 在对象上是一一对应的, 则容易定义函子 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 使得 $GF=1_{\mathcal{C}}, FG=1_{\mathcal{D}}$. 因此我们可以得出函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个同构当且仅当 F 是一个局部单且局部满的函子同时 F 在对象上是一一对应的, 这说明相互同构的范畴具有完全相同的结构.

例 1.2.16　设 $(X,\leqslant)$ 和 $(Y,\leqslant)$ 是两个偏序集. 则 $(X,\leqslant)$ 和 $(Y,\leqslant)$ 作为范畴同构当且仅当它们是序同构的. 类似地, 两个半群 G 和 Q 看作范畴是同构的当且仅当它们是半群同构的.

例 1.2.17　集合范畴 Set 在单点集 $\{*\}$ 下的余切片范畴 $\{*\}/\mathrm{Set}$ 同构于点集范畴 (即对象为序对 (X,x) 其中 X 是集合, $x\in X$, 态射为保点映射).

若函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 在态射上的限制 $\mathrm{Mor}\mathcal{C}\to\mathrm{Mor}\mathcal{D}$ 是一个单射, 则称 F 是一个**嵌入**.

容易验证 F 是一个嵌入当且仅当 F 是局部单函子并且 F 在对象上的对应是一个单射.

例 1.2.18　定义函子 $D:\mathrm{Set}\to\mathrm{Top}$,

$$(f:X\to Y)\mapsto(f:D(X)\to D(Y)),$$

这里 $D(X)$ 表示 X 赋予离散拓扑的拓扑空间. 则 D 是一个局部满的嵌入.

我们称一个从两个范畴的乘积范畴到另一个范畴的函子为 **双函子** (bifunctor). 双函子在范畴论中广泛存在, 例如由乘积范畴我们可以自然地产生两个双函子:

$$P_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{C},(A,B)\mapsto A,(f,g)\mapsto f,$$

$$P_{\mathcal{D}}:\mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{D},(A,B)\mapsto B,(f,g)\mapsto g.$$

我们称之为射影函子. 射影函子具有下面的“万有性质”:

对任意的范畴 $\mathcal{E}$ 及函子 $R:\mathcal{E}\to\mathcal{C}$ 和 $T:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$, 存在唯一的函子 $F:\mathcal{E}\to\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 使得 $P_{\mathcal{C}}F=R, P_{\mathcal{D}}F=T$, 即下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}\times\mathcal{D} & \xrightarrow{P_C} & \mathcal{C} \\
{\scriptstyle P_D}\downarrow & \overset{F}{\nwarrow} & \uparrow{\scriptstyle R} \\
\mathcal{D} & \xleftarrow[T]{} & \mathcal{E}
\end{array}$$

练习 1.2

1. 设 G 是一个 Abel 群, 看作一个范畴. 证明加法运算 $+:G\times G\to G$ 是一个双函子.

2. 设 $\mathbb{Z}$ 是整数加法群. 对任意的群 G, 记 $(\mathbb{Z}, G)$ 为整数加法群 $\mathbb{Z}$ 到群 G 的群同态构成的集合. 若 $h: G \to G'$ 是一个群同态, 记

$$(\mathbb{Z}, f): (\mathbb{Z}, G) \to (\mathbb{Z}, G'), \qquad p \mapsto hp,$$

证明 $(\mathbb{Z}, -): \mathrm{Gp} \to \mathrm{Set}$ 是一个函子.

3. 设 X 是一个拓扑空间, 记 $\Gamma(X)$ 为 X 的开集格. 若 $f: Y \to X$ 是一个连续映射, 记 $\Gamma(f): \Gamma(X) \to \Gamma(Y)$, $\Gamma(f)(U) = f^{-1}(U)$. 证明任意 $\Gamma(X)$ 在包含序关系下是一个 frame, 从而 $\Gamma: \mathrm{Top} \to \mathrm{Frm}^{\mathrm{op}}$ 定义了一个从拓扑空间范畴 Top 到 frame 范畴 Frm 的反变函子.

4. 设 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个函子. 证明存在函子 $G: \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, $H: \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ 使得:

(1) $F = HG$.

(2) G 是局部满的而 H 是一个嵌入.

5. 如果范畴 $\mathcal{C}$ 满足对任意两个对象 $A, B \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, $\mathcal{C}(A, B) \neq \emptyset$, 则称范畴 $\mathcal{C}$ 是**连通的**. 记 $\mathcal{T}$ 为只有一个对象和一个态射的范畴, 证明 $\mathcal{C}$ 是一个连通范畴当且仅当 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{T}$ 的唯一函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{T}$ 是局部满的.

6. 证明从拓扑空间范畴 Top 到集合范畴 Set 的遗忘函子 $F: \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ 是局部单的但不是一个嵌入.

7. 证明任意一个函子保持对象的同构, 即把同构的对象对应为同构的对象.

1.3 自然变换

上一节中我们介绍的函子是用来研究范畴之间的对应关系, 这一节我们来讨论函子之间的对应关系, 我们称之为自然变换.

定义 1.3.1 设 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 是范畴, $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 与 $G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是两个函子. 一个**自然变换**(natural transformation)$\alpha: F \to G$ 是一个映射 $\mathrm{ob}\mathcal{C} \to \mathrm{Mor}\mathcal{D}$:

$$A \mapsto (\alpha_A: F(A) \to G(A)), \qquad A \in \mathrm{ob}\mathcal{C},$$

使得对 $\mathcal{C}$ 中的任意态射 $f: A \to B$, $G(f)\alpha_A = \alpha_B F(f)$ 成立, 即下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow{\alpha_B} & G(B) \end{array}$$

如果自然变换 $\alpha: F \to G$ 满足对任意的 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{C}, \alpha_A: F(A) \to G(A)$ 是一个同构, 则称 α 是一个**自然同构**(natural isomorphism).

命题 1.3.2 设 $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是函子, $\alpha : F \to G, \beta : G \to H$ 是自然变换, 则:

(1) $\beta\alpha : F \to H : A \mapsto (F(A) \xrightarrow{\beta_A\alpha_A} H(A))$ 是一个自然变换.

(2) $\alpha T : FT \to GT : B \mapsto (FT(B) \xrightarrow{\alpha_{T(B)}} GT(B))$ 是一个自然变换.

(3) $T\alpha : TF \to TG : A \mapsto (TF(A) \xrightarrow{T(\alpha_A)} TG(A)$ 是一个自然变换.

证明 我们只证 (1), (2) 和 (3) 的证明留给读者作为练习.

(1) 对 $\mathcal{C}$ 中的任意态射 $f : A \to B$. 由于 α 和 β 都是自然变换, 故下面图表中左右两边的方形均交换, 因此外面的大方形仍然交换.

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) & \xrightarrow{\beta_A} & H(A) \\ \downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} & & \downarrow{\scriptstyle H(f)} \\ F(B) & \xrightarrow{\alpha_B} & G(B) & \xrightarrow{\beta_B} & H(B) \end{array}$$

□

由命题 1.3.2, 自然变换之间可以进行复合运算并且每个函子 F 到自身都存在一个单位自然变换 $1_F : F \to F$ 使得任意对象对应的态射都是一个单位态射. 因此如果 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 都是小范畴, 则以范畴 $\mathcal{C}$ 到范畴 $\mathcal{D}$ 的所有函子为对象, 以自然变换为态射可以形成一个范畴 $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, 称为**函子范畴**.

例 1.3.3 设 $P : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ 是例 1.2.5 中定义的幂集函子. 对任意集合 A, 定义 $\beta_A : A \to P(A)$ 为 $x \mapsto \{x\}$. 若 $f : A \to B$, 我们有 $P(f)(\{x\}) = \{f(x)\}$, 即下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\beta_A} & P(A) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P(f)} \\ B & \xrightarrow{\beta_B} & P(B) \end{array}$$

因此 β 是一个自然变换 $1_{\mathrm{Set}} \to P$.

例 1.3.4 设 $F : \mathrm{Set} \to \mathrm{Gp}$ 是例 1.2.4 中定义的自由群函子, $G : \mathrm{Gp} \to \mathrm{Set}$ 是遗忘函子. 对任意的集合 X, 令 $\gamma_X : X \to GF(X)$ 是包含映射. 则对任意的集合映射 $f : X \to Y$, 下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\gamma_X} & GF(X) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle GF(f)} \\ Y & \xrightarrow{\gamma_Y} & GF(Y) \end{array}$$

因此 $\gamma : 1_{\mathrm{Set}} \to GF$ 是一个自然变换.

回忆两个范畴同构的概念是指两个范畴具有完全相同的结构, 但是在实际应用中我们并不需要如此强的条件. 下面我们利用自然变换的概念给出范畴之间一种较弱的相同性, 称为**等价**. 而等价的范畴正是我们在具体范畴中经常遇到并且具有几乎相同性质的范畴类.

定义 1.3.5　设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个函子. 如果存在函子 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 及自然同构 $\alpha:1_{\mathcal{C}}\to GF$ 和 $\beta:1_{\mathcal{D}}\to FG$, 则称函子 F 是一个**等价**(equivalence).

如果存在等价函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, 则称范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 是**等价的范畴**(equivalent categories).

如果范畴 $\mathcal{C}$ 与范畴 $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ 等价, 则称 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 是**对偶等价的范畴**(dual equivalent categories).

由于函子保持对象的同构, 结合命题 1.3.2, 容易验证范畴的等价构成了范畴之间的一个等价关系.

例 1.3.6　对任一给定的集合 B, B 上的切片范畴 Set/B 等价于 B 指标集族范畴 Set^B. 这里范畴 Set^B 是指将集合 B 看作一个离散范畴而得到的函子范畴 $[B,\mathrm{Set}]$, 其对象可以看作所有以 B 为指标集的集族 $\{X_b\mid b\in B\}$, 而态射 $f:\{X_b\mid b\in B\}\to\{Y_b\mid b\in B\}$ 是指一个映射族 $\{f_b:X_b\to Y_b\mid b\in B\}$. 我们可以定义等价函子 $F:\mathrm{Set}/B\to\mathrm{Set}^B$, 使得

$$(f:A\to B)\mapsto\{f^{-1}(b)\mid b\in B\}.$$

若 $h:(A,f)\to(C,g)$, 则 $F(h):F(A,f)\to F(C,g)$ 为映射族 $\{h|_{f^{-1}(b)}:f^{-1}(b)\to g^{-1}(b)\mid b\in B\}$. 而其等价逆函子 $G:\mathrm{Set}^B\to\mathrm{Set}/B$ 定义为将任意一个集族 $\{X_b\mid b\in B\}$ 对应为该集族的不交并 $\coprod X_b$ 到集合 B 的射影 $f:\coprod X_b\to B$.

例 1.3.7　集合范畴 Set 在单点集 $\{*\}$ 下的余切片范畴 $\{*\}/\mathrm{Set}$(亦可以看成所谓的点集范畴) 等价于关系范畴 Rel 的一个子范畴 Part. 其中 Part 是以所有集合为对象以偏映射为态射的范畴, 这里一个偏映射 $f:A\to B$ 是一个关系使得 A 中的每个元素最多对应 B 中的一个元素. 事实上我们可以定义等价函子: $F:\{*\}/\mathrm{Set}\to\mathrm{Part}$ 使得

$$(A,a)\mapsto A\setminus\{a\},$$

并且若 $f:(A,a)\to(B,b)$, 则对任意的 $a'\in A\setminus\{a\}$,

$$F(f)(a')=f(a'),$$

等价逆函子 $G:\mathrm{Part}\to\{*\}/\mathrm{Set}$ 使得

$$A\mapsto A^+=A\cup\{A\}.$$

如果两个范畴是同构的, 则这两个范畴等价, 但反之不成立.

例 1.3.8 一个有两个对象的范畴 $\cdot \rightleftarrows \cdot$ 与单点范畴 (只有一个对象和一个态射) 的范畴是等价的但不是同构的.

例 1.3.9 范畴 $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}$ 等价于有限维向量空间和线性变换构成的范畴, 但二者不同构. 事实上范畴 $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}$ 中的任意两个对象都不同构, 而向量空间则不同, 因此二者不可能同构, 而等价函子容易给出.

命题 1.3.10 范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是等价的, 当且仅当存在一个局部单且局部满的函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 使得任意的 $B\in\mathrm{ob}\mathcal{D}$, 存在 $A\in\mathrm{ob}\mathcal{C}$, 使得 $F(A)$ 与 B 同构.

证明 "$\Rightarrow$" 若函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 和 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 以及自然同构 $\alpha:1_{\mathcal{C}}\to GF$ 和 $\beta:1_{\mathcal{D}}\to FG$, 则由 α 是自然同构可知 F 是局部单且局部满的. 另外由 β 是自然同构可知任意的 $B\in\mathrm{ob}\mathcal{D}$, 存在 $A\in\mathrm{ob}\mathcal{C}, F(A)$ 与 B 同构.

"$\Leftarrow$" 若 F 是一个满足命题条件的函子, 定义 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}:(g:B\to C)\mapsto(G(g):G(B)\to G(C))$ 使得 $\alpha_B:B\to F(G(B))$ 和 $\alpha_C:C\to F(G(C))$ 是同构, $F(G(g))=\alpha_C g\alpha_B^{-1}$, 这里 α_B^{-1} 表示 α_B 的逆. 则 G 是一个函子并且 $\alpha:1_{\mathcal{D}}\to FG$ 是一个自然同构. 另一方面对 $\mathcal{C}$ 中任意对象 A, 由于 $\alpha_{F(A)}:F(A)\to F(G(F(A)))$ 是同构, 故由 F 是局部单和局部满的可得存在唯一的同构 $\beta_A:A\to G(F(A))$ 使得 $F(\beta_A)=\alpha_{F(A)}$. 这样我们就可以得到自然同构 $\beta:1_{\mathcal{C}}\to GF$. □

设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴. 如果 $\mathcal{C}$ 中的任一同构态射 f 都满足 dom(f)=cod(f), 则称 $\mathcal{C}$ 是一个**骨架** (skeleton). 给定一个范畴 $\mathcal{D}$, 如果 $\mathcal{D}$ 的满子范畴 $\mathcal{C}$ 是一个骨架并且 $\mathcal{D}$ 中的任意对象都存在 $\mathcal{C}$ 中的一个对象与其同构, 则称 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{D}$ 的一个**骨架**.

假设选择公理, 我们可以证明下面命题成立.

命题 1.3.11 (1) 任意一个范畴都有一个骨架.

(2) 一个范畴的任意两个骨架是同构的.

(3) 两个范畴是等价的当且仅当它们有同构的骨架.

证明 (1) 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, 在 $\mathcal{C}$ 的每个对象的同构类中选取一个对象构成 $\mathcal{C}$ 的一个满子范畴 $\mathcal{C}'$, 显然 $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}$ 的骨架.

(2) 若 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C}'$ 都是 $\mathcal{D}$ 的骨架, 则 $\mathcal{C}$ 中任意对象 A 都存在 $\mathcal{C}'$ 中的一个对象 $F(A)$ 与 A 同构, 并且由骨架的定义, 这样的 $F(A)$ 是唯一的. 这样我们确定了一个函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$. 同理我们可以确定一个函子 $G:\mathcal{C}'\to\mathcal{C}$, 使得任意的 $A'\in\mathrm{ob}\mathcal{C}'$, A' 与 $G(A')$ 同构, 并且 $GF=1_{\mathcal{C}}$, $FG=1_{\mathcal{C}'}$.

(3) 首先注意到任意范畴的骨架到该范畴的包含函子满足例 1.3.9 中的条件, 因此每个范畴的骨架与原范畴是等价的, 因此如果两个范畴的骨架同构, 则这两个范畴等价. 反之, 如果两个范畴是等价的, 类似于 (2) 的证明可以证明它们的骨架是同构的, 细节读者可自行补充.

练习 1.3

1. 证明命题 1.3.2.

2. 利用命题 1.3.2, 证明范畴的等价构成了范畴之间的一个等价关系.

3. 证明对任意一个给定的群 G,

$$G\times -:\mathrm{Gp}\to\mathrm{Gp},\qquad (f:H\to M)\mapsto(1_G\times f:G\times H\to G\times M)$$

定义了一个函子. 若 $h:G\to R$ 是一个群同态, 则对任意的群 H 由

$$\alpha_H=h\times 1_H:G\times H\to R\times H$$

定义了一个自然变换 $\alpha:G\times -\to R\times -$.

4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, 考虑按下面方式生成的范畴 $\mathcal{C}^{\to}$:

其对象是 $\mathcal{C}$ 中的态射, 若 $f:A\to B$, $g:C\to D$ 是 $\mathcal{C}$ 中的两个态射, 则 f 到 g 的一个态射是指 $\mathcal{C}$ 中的两个态射 $\alpha:A\to C$, $\beta:B\to D$ 使得 $\beta f=g\alpha$, 即下面的方形交换:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B\\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta}\\ C & \xrightarrow{g} & D\end{array}$$

如果记 2 为如下图表表示的范畴

$$\cdot\to\cdot$$

证明函子范畴 $[2,\mathcal{C}]$ 同构于范畴 $\mathcal{C}^{\to}$.

5. 证明遗忘函子 $U:\mathrm{Gp}\to\mathrm{Set}$ 自然同构于函子 $(\mathbb{Z},-):\mathrm{Gp}\to\mathrm{Set}$.

6. 设范畴 $\mathcal{D}$ 满足下面性质:

(1) $\mathcal{D}$ 中的对象都是小范畴.

(2) 若 $A,B\in\mathrm{ob}\mathcal{D}$, 则 $|\mathcal{D}(A,B)|\leqslant 1$.

(3) 如果 $|\mathcal{D}(A,B)|=|\mathcal{D}(B,A)|=1$, 则 $A=B$.

证明范畴 $\mathcal{D}$ 等价于偏序集范畴 Poset.

7. 设 $F,G,H:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是函子, $\alpha:F\to G$, $\beta:G\to H$ 是自然同构. 证明:

(1) $\alpha^{-1}:G\to F$, $(\alpha^{-1})_A={\alpha_A}^{-1}:G(A)\to F(A)$ 是一个自然同构.

(2) $\beta\alpha:F\to H$ 是一个自然同构.

8. 证明两个范畴等价当且仅当它们具有同构的骨架.

1.4 单态射与满态射

范畴论的最初目的就是将许多不同数学领域但具有相似特征的具体数学对象和映射抽象为统一的概念, 而这种抽象是通过态射来实现的. 例如一个集合 T 是一个单点集, 从范畴论的角度我们可以等价地表示为任意一个集合到集合 T 恰好存在一个映射. 因此态射在范畴论中扮演着主要的角色. 事实上如果我们将每个对象看作一个单位态射, 这时我们可以完全不谈对象, 只用态射来论述, 这也是范畴论有时被称为"箭头语言"的原因. 反过来范畴论中的许多概念都可以在一些具体范畴中找到原型, 如集合范畴.

设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, $f : A \to B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射. 如果对 $\mathcal{C}$ 中的任意一对平行态射 $g, h : C \to A$ 使得 $fg = fh$, 则有 $g = h$(这时称 f 是左可约的), 我们称 f 是一个**单态射**(monomorphism).

对偶地我们定义 f 是**满态射**(epimorphism) 当且仅当任意一对平行态射 $g, h : B \to C$ 使得 $gf = hf$, 则有 $g = h$ (这时称 f 是右可约的).

如果 f 既是单态射又是满态射, 则称 f 是一个**双态射**(bimorphism).

例 1.4.1 集合范畴 Set 中, 一个态射是单态射当且仅当它是一个单射, 是满态射当且仅当它是一个满射. 类似地在拓扑空间范畴 Top 中, 单态射是连续单映射而满态射是连续满映射.

例 1.4.2 群范畴 Gp 和 R 模范畴 $\mathrm{Mod_R}$ 中, 单态射是单同态而满态射是满同态.

例 1.4.3 环范畴 Rng 中, 单态射是单同态但满态射不一定是满同态 (如整数环 $\mathbb{Z}$ 到有理数环 $\mathbb{Q}$ 的包含是一个满态射但不是满同态).

命题 1.4.4 设f 和 g 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射, 满足 dom(g)=cod(f), 则下列命题成立:

(1) 如果 gf 单态射, 则 f 是单态射.

(2) 如果 f 与 g 都是单态射, 则 gf 是单态射.

(3) 如果 gf 是满态射, 则 g 是满态射.

(4) 如果 f 与 g 都是满态射, 则 gf 是满态射.

证明 (1) 设 $f : A \to B, g : B \to C, r, s : D \to A$ 是一对平行态射, 则 $fr = fs \Rightarrow (gf)r = (gf)s \Rightarrow r = s$.

(2) 类似地设 $f : A \to B, g : B \to C, r, s : D \to A$, 则 $(gf)r = (gf)s \Rightarrow g(fr) = g(fs) \Rightarrow fr = fs \Rightarrow r = s$.

类似可证 (3) 和 (4) 成立 (或由对偶原理可得). □

命题 1.4.5 设 $f : A \to B$ 是一个态射:

(1) 如果 f 存在一个左逆, 即存在 $h: B \to A$ 使得 $hf = 1_A$, 则 f 是一个单态射.

(2) 如果 f 存在一个右逆, 即存在 $g: B \to A$ 使得 $fg = 1_B$, 则 f 是一个满态射.

证明　由对偶原理, 只需验证 (1) 成立即可.

若存在 $h: B \to A$ 使得 $hf = 1_A$, 则对 $\mathcal{C}$ 中的任意一对平行态射 $r, s: C \to A$ 使得 $fr = fs$, 我们有 $r = 1_A r = (hf)r = h(fr) = h(fs) = (hf)s = 1_A s = s$.　□

命题 1.4.6　设 $f: A \to B$ 是一个态射, 则下列命题等价:

(1) f 是一个同构.

(2) f 是一个单态射并且 f 存在一个右逆.

(3) f 是一个满态射并且 f 存在一个左逆.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2) 设 $g: B \to A$ 是 f 的逆, 则 $fr = fs \Rightarrow (gf)r = (gf)s \Rightarrow r = s$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $g: B \to A$ 是 f 的右逆, 则 $f(gf) = (fg)f = f = f1_A \Rightarrow gf = 1_A$ 故 g 是 f 的逆.

由于同构是一个自对偶性质, 故由对偶原理可得 (1) 与 (3) 等价.　□

推论 1.4.7　设 f 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个态射. 若 f 是一个同构, 则 f 是一个双态射.

注意推论 1.4.7 的逆命题不成立. 如在环范畴 Rng 中, 整数环到有理数环的包含是一个双态射但不是同构.

如果范畴 $\mathcal{C}$ 中的每个双态射都是一个同构, 则称 $\mathcal{C}$ 是**平稳范畴**(balanced category). 例如, 集合范畴 Set、群范畴 Gp 和 R 模范畴 Mod_R 都是平稳范畴, 而环范畴 Rng 和拓扑空间范畴 Top 都不是平稳范畴.

练习 1.4

1. 证明 R 模范畴 Mod_R 是平稳范畴.

2. 证明整数环 $\mathbb{Z}$ 到有理数环 $\mathbb{Q}$ 的包含是一个满态射, 从而得出环范畴 Rng 不是平稳范畴.

3. 如果范畴 $\mathcal{C}$ 中的单态射 $m: A \to B$ 满足条件:

$$m = (A \xrightarrow{e} C \xrightarrow{f} B)(\text{其中 } e \text{是满态射}) \Longrightarrow e \text{ 是一个同构},$$

则称 m 是一个**严格单态射**(extremal monomorphism). 证明:

(1) 若态射 $m: A \to B$ 存在左逆, 则 m 是一个严格单态射.

(2) $f: C \to D$ 是一个同构当且仅当 f 是一个满态射并且是一个严格单态射.

(3) 范畴 $\mathcal{C}$ 是平稳的当且仅当任意一个单态射都是严格单态射.

4. 证明两个严格单态射的复合不必是严格单态射.

5. 若 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个局部单函子, $m:A\to B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射. 证明如果 $F(m):F(A)\to F(B)$ 是范畴 $\mathcal{D}$ 中的单态射, 则 m 是一个单态射.

6. 如果范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个态射 $f:A\to A$ 满足 $ff=f$, 则称 f 是**幂等的态射**(idempotent morphism). 如果 f 满足 $f=(A\xrightarrow{g}B\xrightarrow{h}A)$ 并且 $gh=1_B$, 则称 f 是**分裂的态射**(split morphism). 证明在拓扑空间范畴 Top 和 Abel 群范畴 AbGp 中幂等的态射都是分裂的.

1.5 子对象与商对象

在许多具体的范畴中我们经常需要讨论某个对象的“子对象”, 我们可以将这一概念抽象为范畴概念. 但是在范畴论中我们与其说是讨论对象之间的“包含关系”不如说来讨论“包含态射”的性质. 值得注意的是由于不同的具体范畴中对“包含态射”的要求不同, 所以我们不能给出一个统一的条件来刻画所有的“包含态射”.

定义 1.5.1 设 M 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族单态射, $A,B\in\mathrm{ob}\mathcal{C}$. 如果存在 M 中的一个态射 $f:A\to B$, 则称 (A,f) 为对象 B 的 ***M*子对象**(M-subobject). 若 M 是 $\mathcal{C}$ 中的全体单态射, 则我们简称 (A,f) 是 B 的**子对象**(subobject).

例 1.5.2 在集合范畴 Set 中, 子对象恰好对应于子集合. 类似地, 在群范畴 Gp、Abel 群范畴 AbGp、环范畴 Rng、R 模范畴 $\mathrm{Mod_R}$ 和紧 Hausdorff 拓扑空间范畴 HComp 中, 子对象分别对应于子群、子 Abel 群、子环、子 R 模和紧 Hausdorff 拓扑子空间.

例 1.5.3 在拓扑空间范畴 Top、关系范畴 Rel 和偏序集范畴 Poset 中, 子对象并非对应于子空间、子关系和子偏序集.

设 $B\in\mathrm{ob}\mathcal{C}$, 记 B 的全体子对象族为 $\mathrm{Sub}(B)$. 我们可以在 $\mathrm{Sub}(B)$ 上定义一个二元关系如下:

(1) $(A,f)\leqslant(A',f')$ 当且仅当存在态射 (实际上是唯一的)$g:A\to A'$ 满足 $f=f'g$, 即下面图表交换

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & A' \\ & {\scriptstyle f}\searrow & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ & & B \end{array}$$

(2) 如果存在同构 $h:A\to A'$ 使得 $f=f'h$, 则称 (A,f) 与 (A',f') 是同构的.

引理 1.5.4 若 B 的子对象 (A,f) 与 (A',f') 满足 $(A,f)\leqslant(A',f'),(A',f')\leqslant(A,f)$, 则 (A,f) 与 (A',f') 同构.

证明 由题设存在态射 $g:A\to A'$ 和 $h:A'\to A$ 满足 $f=f'g$, $f'=fh$. 则 $f(hg)=(fh)g=f'g=f=f1_A\Rightarrow hg=1_A$, 同理可得 $gh=1_{A'}$. □

因此如果我们不计同构 (即同构的子对象看成是相同的), 则子对象之间的 $\leqslant$ 关系形成了一个偏序关系.

定义 1.5.5　设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, 如果对任意的 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, A 的子对象族 $\mathrm{Sub}(A)$ 在同构意义下是一个偏序集, 则称 $\mathcal{C}$ 是**良幂范畴**(wellpowered category).

例 1.5.6　集合范畴 Set、拓扑空间范畴 Top、群范畴 Gp 都是良幂范畴.

例 1.5.7　设 $\mathcal{C}$ 是一个具有偏序关系的真类并且有一个最大元 (如取所有的序数类另外再添加一个最大元) 看作一个范畴, 则范畴 $\mathcal{C}$ 中的每个对象都是最大元的子对象, 因此 $\mathcal{C}$ 不是良幂范畴.

定义 1.5.8　设 T 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个对象, 如果 $\mathcal{C}$ 中的任意对象 A 都恰好存在一个态射 $A \to T$, 则称 T 是 $\mathcal{C}$ 中的一个**终对象**(terminal object). 对偶地, 若 $\mathcal{C}$ 中的对象 S 满足对任意对象 A 都恰好有一个态射 $S \to A$, 则称 S 是 $\mathcal{C}$ 中的一个**初始对象**(initial object).

终对象和初始对象在同构的意义下是唯一的.

命题 1.5.9　若 T 和 P 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个终对象 (初始对象), 则 T 与 P 同构.

证明　由定义可知存在态射 $f: T \to P$ 和 $g: P \to T$. 由唯一性可知 $gf = 1_T$, $fg = 1_P$. □

例 1.5.10　在集合范畴 Set 中, 任意单点集是终对象而空集是初始对象.

例 1.5.11　在拓扑空间范畴 Top 中, 终对象是单点空间而初始对象是空集.

例 1.5.12　在偏序集中, 终对象是最大元而初始对象是最小元.

命题 1.5.13　设 T 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的终对象, $A \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$. 若存在 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f: T \to A$, 则 f 是一个单态射, 因此 (T, f) 是 A 的子对象.

证明　由定义显然. □

在数学研究中我们不仅要讨论子对象而且经常需要讨论所谓的商对象, 如商群、商空间等. 这些对象的共同特征就是存在一个到商对象的满映射. 对偶于子对象, 我们可以定义所谓的商对象.

定义 1.5.14　设 E 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族满态射, $A, B \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$. 如果存在 E 中的态射 $f: B \to A$, 则称 (f, A) 为对象 B 的***E*商对象**(E-quotient object) . 若 E 是 $\mathcal{C}$ 中的全体满态射, 则我们简称 (f, A) 是 B 的**商对象**(quotient object).

例 1.5.15　在集合范畴 Set 中, 商对象对应于商集. 设集合 B 是集合 A 一个商集, 即存在满映射 $F: A \to B$. 我们可以定义 A 上的一个等价关系 $E_B = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$. 容易验证这样的对应形成了 A 的商对象与 A 上的等价关系之间的一一对应.

例 1.5.16　在紧 Hausdorff 拓扑空间范畴 Hcomp 中, 商对象对应于商空间. 类似于例 1.5.15 可以证明一个紧 Hausdorff 拓扑空间 X 的商对象与 X 上的等价关系

是一一对应的.

例 1.5.17 在拓扑空间范畴 Top 中, 商对象未必对应于商空间 (事实上任意一个非平庸拓扑空间到该空间的底集赋予平庸拓扑形成的拓扑空间上的恒同映射是连续的满映射但不是一个商映射). 类似地在群范畴 Gp、Abel 群范畴 AbGp 和环范畴 Rng 中商对象不一定是商群、商 Abel 群和商环.

对偶于子对象的情形, 我们可以在 A 的商对象族 $\mathrm{Quot}(A)$ 上定义一个二元关系如下:

(1) $(e,B)\geqslant(e',B')$ 当且仅当存在态射 (实际上是唯一的)$f:B\to B'$ 满足 $e'=fe$, 即下面图表交换

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & B \\ & \searrow^{e'} & \downarrow f \\ & & B' \end{array}$$

(2) 如果存在同构 $h:B\to B'$ 使得 $e'=he$, 则称 (e,B) 与 (e',B') 是同构的.

类似于子对象的情形, 我们可以证明上面的二元关系在同构的意义下是一个偏序关系. 对偶于子对象, 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, 如果对任意的 $A\in\mathrm{ob}\mathcal{C}$, A 的商对象族 $\mathrm{Quot}(A)$ 在同构意义下构成一个偏序集, 则称 $\mathcal{C}$ 是一个**余良幂范畴**(co-wellpowered category).

例 1.5.18 集合范畴 Set, Hausdorff 拓扑空间范畴 Haus, 群范畴 Gp 和环范畴 Rng 都是余良幂范畴.

例 1.5.19 Urysohn 拓扑空间范畴不是余良幂范畴 (拓扑空间 X 称为 Urysohn 空间是指对 X 中任意不同的两点 x,y, 存在连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使得 $f(x)=0, f(y)=1$).

命题 1.5.20 设 I 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的初始对象, $A\in\mathrm{ob}\mathcal{C}$. 若存在 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f:A\to I$, 则 f 是一个满态射, 因此 (f,I) 是 A 的商对象.

作为一种比良幂和余良幂条件较弱条件的推广, 我们来引入分离集 (separating set) 和余分离集 (coseparating set) 的概念.

定义 1.5.21 设 $\{B_i\mid i\in I\}\subseteq\mathrm{ob}\mathcal{C}$. 如果对 $\mathcal{C}$ 中任意一对不同态射 $r,s:B\to C$, 存在 $i\in I$ 以及态射 $f:B_i\to B$ 使得 $rf\neq sf$, 则称 $\{B_i\mid i\in I\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个**分离集**. 若 I 是单点集, 则称 B_i 是 $\mathcal{C}$ 中的一个**分离子**(separator).

对偶地若对 $\mathcal{C}$ 中任意一对不同态射 $r,s:B\to C$, 存在 $i\in I$ 以及态射 $g:C\to B_i$ 使得 $gr\neq gs$, 则称 $\{B_i\mid i\in I\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个**余分离集**. 若 I 是单点集, 则称 B_i 是 $\mathcal{C}$ 中的一个**余分离子**(coseparator).

例 1.5.22 在集合范畴 Set 中, 任意一个非空集合都是一个分离子, 任意一个含有两个以上点的集合都是一个余分离子.

例 1.5.23　在拓扑空间范畴 Top 中, 任意一个非空拓扑空间都是一个分离子, 而余分离子恰好是全体非空的非 T_0 的拓扑空间 (事实上拓扑空间 X 是非 T_0 的当且仅当 X 存在一个含有两个以上点的平庸子空间).

例 1.5.24　二元 Boole 代数是 Boole 代数范畴中的余分离子; "圈群" $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 是 Abel 群范畴 AbGp 中的余分离子; 单位闭区间 $I = [0, 1]$ 是 Tychonoff 拓扑空间范畴中的余分离子.

练习 1.5

1. 证明在拓扑空间范畴 Top 中, (Y, f) 为对象 X 的子对象当且仅当 $f : Y \to X$ 是单射, 而 (Y, f) 为对象 X 的严格子对象 (extremal subobject) 当且仅当 $f : Y \to X$ 是一个包含映射. 因此在范畴 Top 中, 严格子对象对应于子空间包含.

2. 举例说明在某个范畴 $\mathcal{C}$ 中, 存在 B 的两个子对象 (A, f) 与 (A', g), 使得 A 与 A' 同构, 但是 (A, f) 与 (A', g) 不同构.

3. 如果范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 O 既是初始对象又是终对象, 则称 O 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的零对象. 证明单点群是群范畴 Gp (或 Abel 群范畴 AbGp) 中的零对象.

4. 证明 S 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个分离子当且仅当态射函子 $\mathcal{C}(S, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$(定义见 1.6 节) 是一个局部单函子. 对偶地 C 是 $\mathcal{C}$ 中的一个余分离子当且仅当反变态射函子 $\mathcal{C}(-, C) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ 是一个局部单函子.

1.6　Yoneda 引理与可表达函子

在范畴论中, 我们往往要小心翼翼以避免陷入集合论的泥潭中去. 例如, 在考虑两个范畴之间的函子范畴的时候, 我们要假定定义域范畴是一个小范畴以便两个函子之间的自然变换的全体是一个集合. 这一节我们来讨论范畴论中的一个非常有意义的发现, 该发现表明了关于某个对象的态射函子到一个集值函子的自然变换完全由此对象在该集值函子下的象中的元素确定.

设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, $A \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$. 我们可以定义一个函子 $\mathcal{C}(A, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ 如下:

$$B \mapsto \mathcal{C}(A, B),$$

$$(f : B \to C) \mapsto (\mathcal{C}(A, f) : g \mapsto fg).$$

我们称函子 $\mathcal{C}(A, -)$ 为关于 A 的**态射函子**(hom-functor). 对偶地我们可以定义函子 $\mathcal{C}(-, A) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$. 我们称之为关于 A 的**反变态射函子**(contravariant hom-functor).

定理 1.6.1(Yoneda 引理) 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, $A \in \text{ob}\mathcal{C}$, $F : \mathcal{C} \to \text{Set}$ 是一个函子. 记 $\text{Nat}(\mathcal{C}(A,-),F)$ 为函子 $\mathcal{C}(A,-)$ 与函子 F 之间的自然变换的全体. 则存在一个 $\text{Nat}(\mathcal{C}(A,-),F)$ 到 $F(A)$ 上的一一到上的映射.

证明 对每个自然变换 $\alpha : \mathcal{C}(A,-) \to F$, 定义 $\Theta(\alpha) = \alpha_A(1_A) \in F(A)$, 我们只需要证明 $\Theta : \text{Nat}(\mathcal{C}(A,-),F) \to F(A)$ 是一个一一到上的映射. 为此我们建立 Θ 的逆映射.

对 $x \in F(A)$, 定义 $\Phi(x) : \mathcal{C}(A,-) \to F$, $\Phi(x)_B(f) = F(f)(x) \in F(B)$. 容易验证 $\Phi(x)$ 是一个自然变换, 因此有映射 $\Phi : F(A) \to \text{Nat}(\mathcal{C}(A,-),F)$. 不难看出 Φ 与 Θ 是互逆的. □

定义 1.6.2 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, $F : \mathcal{C} \to \text{Set}$ 是一个函子. 如果存在 $\mathcal{C}$ 中的对象 A 和一个自然同构 $\phi : \mathcal{C}(A,-) \to F$, 则称序对 (A,ϕ) 是 F 的一个**表达**(representation). 如果 F 存在一个表达, 则称 F 是一个**可表达函子**(representable functor).

由 Yoneda 引理的证明过程我们可以看出, F 的一个表达可以看成一个序对 (A,x)(这里 $A \in \text{ob}\mathcal{C}, x \in F(A)$) 使得 x 对应的自然变换是一个自然同构, 即对任意一个对象 B 以及每个 $y \in F(B)$, 存在唯一的态射 $f : A \to B$ 使得 $F(f)(x) = y$. 由此我们可以得到 F 的表达的一种等价叙述如下:

我们以所有的序对 (A,x)(这里 $A \in \text{ob}\mathcal{C}, x \in F(A)$) 为对象, 而态射 $f : (A,x) \to (B,y)$ 是指态射 $f : A \to B$ 满足 $F(f)(x) = y$. 不难验证这样形成一个范畴, 则 F 的表达恰好就是该范畴中的一个初始对象.

因此我们可以得出如果函子 F 是可表达的, 则其表达在同构的意义下是唯一的.

例 1.6.3 群范畴 Gp 到集合范畴的遗忘函子 $U : \text{Gp} \to \text{Set}$ 是可表达函子. 事实上, 对任意一个群 G, 从整数加法群 $\mathbb{Z}$ 到 G 的群同态 $f : \mathbb{Z} \to G$ 完全由 $f(1)$ 的值确定, 因此从 $\mathbb{Z}$ 到 G 的群同态与 $U(G)$ 的元素是一一对应的. 由 Yoneda 引理, $(\mathbb{Z},1)$ 是 U 的一个表达.

例 1.6.4 反变幂集函子 $P^* : \text{Set}^{\text{op}} \to \text{Set}$ 是可表达函子. 事实上对任意一个集合 X, $P(X)$ 中的元素与 X 到两点集 $2 = \{0,1\}$ 的所有映射是一一对应的. 因此我们可以定义一个自然同构 $P^* \to \text{Set}(-,2)$, 即 $(2,\{1\})$ 是 P^* 的一个表达.

练习 1.6

1. 证明从拓扑空间范畴 Top 到集合范畴的遗忘函子 $U : \text{Top} \to \text{Set}$ 是一个可表达函子.

2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, 证明以所有定义在 $\mathcal{C}$ 上的可表达函子为对象, 以自然变换为态射构成一个范畴.

3. 证明定理 1.6.1 中的一一到上的映射 $\Theta : \mathrm{Nat}(\mathcal{C}(A,-),F) \to F(A)$ 关于对象 A 是"自然的", 即对任意的态射 $f : A \to B$, 下面的方形交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Nat}(\mathcal{C}(A,-),F) & \xrightarrow{\Theta_A} & F(A) \\ \downarrow & & \downarrow F(f) \\ \mathrm{Nat}(\mathcal{C}(B,-),F) & \xrightarrow{\Theta_B} & F(B) \end{array}$$

其中对应 $\mathrm{Nat}(\mathcal{C}(A,-),F) \to \mathrm{Nat}(\mathcal{C}(B,-),F)$ 将任意的自然变换 $\alpha : \mathcal{C}(A,-) \to F$ 对应为自然变换 $\bar{\alpha} : \mathcal{C}(B,-) \to F$ 使得对任意的 $C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$ 和任意的 $p \in \mathcal{C}(B,C)$, $\bar{\alpha}_C(p) = \alpha_C(pf)$.

1.7 射影对象与单射对象

定义 1.7.1 设 $E \subsetneq \mathrm{Mor}\mathcal{C}$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族满态射, 使得 E 中任意一个态射与同构态射的复合仍然属于 E, $P \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$. 如果对 E 中的任意态射 $e : A \to B$, 以及任意给定的态射 $f : P \to B$, f 可以通过 e 分解为 $f = eg$, 即存在 $g : P \to A$ 使得下面图表交换:

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \overset{g}{\swarrow} & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{e} & B \end{array}$$

则称 P 为 $\mathcal{C}$ 中的一个 ***E* 射影对象**(E-projective object). 特别地, 若 E 包含 $\mathcal{C}$ 中的所有满态射, 则称 P 为 $\mathcal{C}$ 中的一个**射影对象**(projective object).

例 1.7.2 考虑集合范畴 Set, 设 P 是任意集合, $e : A \to B$ 是满映射. 如果假设选择公理, 则任意映射 $f : P \to B$ 都存在分解 $f = eg$, 这里 $g : P \to A$ 满足任意的 $x \in P, g(x) \in e^{-1}(f(x))$, 因此 P 是射影对象. 故任意一个集合都是射影对象.

例 1.7.3 拓扑空间范畴 Top 中, 射影对象恰好就是所有的离散拓扑空间. 事实上, 如果 P 是 Top 中的一个射影对象, 考虑由集合 P 赋予离散拓扑的拓扑空间 $\hat{P}$ 到集合 P 赋予平庸拓扑的拓扑空间 $\bar{P}$ 的恒同映射 i. 由于 P 到 $\bar{P}$ 的恒同映射通过 i 的分解是 P 到 $\hat{P}$ 的恒同映射, 而该恒同映射是连续映射, 因此是一个同胚.

例 1.7.4 群范畴 Gp 中 (或 Abel 群范畴 AbGp 中), 整数加法群 $\mathbb{Z}$ 是一个射影对象. 事实上对任意一个满的群同态 $e : A \to B$, 任意一个同态 $f : \mathbb{Z} \to B$, 取 $a \in e^{-1}(f(1))$, 令 $g : \mathbb{Z} \to A$, $g(z) = za$, 则 $(eg)(z) = e(za) = ze(a) = zf(1) = f(z)$.

注意到集合范畴中的满态射恰好就是满映射, 由定义我们容易看出下面命题成立.

命题 1.7.5 设 $P \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, 则 P 是一个射影对象当且仅当态射函子 $\mathcal{C}(P,-) : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ 保持满态射.

命题 1.7.6 若 P 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的初始对象, 则 P 是射影对象.

设 $A, B \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, (B, i) 是 A 的子对象. 如果存在态射 $r: A \to B$ 使得 $ri = 1_B$, 则称 B 是 A 的收缩 (retract).

命题 1.7.7 射影对象的收缩仍然是射影对象.

证明 设 P 是一个射影对象, R 是 P 的收缩, 即存在态射 $i: R \to P$, $r: P \to R$ 使得 $ri = 1_R$. 考虑下面图表:

$$\begin{array}{ccc} R & \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} & P \\ {\scriptstyle gi}\downarrow{\scriptstyle f} & \searrow \swarrow{\scriptstyle g} & \downarrow{\scriptstyle fr} \\ A & \xrightarrow[p]{} & B \end{array}$$

其中 $p: A \to B$ 是满态射, 则存在态射 $g: P \to A$ 使得 $fr: P \to B$ 可以分解为 $fr = pg$, 故 $f = f1_R = f(ri) = p(gi)$, 即 f 可以通过 p 分解, 因此 R 是射影对象. □

对偶地我们可以定义单射对象.

定义 1.7.8 设 $M \subseteq \mathrm{Mor}\mathcal{C}$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族单态射使得 M 中任意一个态射与同构态射的复合仍然属于 M, $I \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$. 如果对 M 中的任意一个态射 $m: A \to B$, 以及任意给定的态射 $f: A \to I$, 存在 f 在 B 上的扩张 $g: B \to I$, 即下面图表交换:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{m} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle g} & \\ I & & \end{array}$$

则称 I 为 $\mathcal{C}$ 中的一个 **M 单射对象**(M-injective object). 特别地若 M 包含 $\mathcal{C}$ 中的所有单态射, 则称 I 为 $\mathcal{C}$ 中的一个**单射对象**(injective object).

例 1.7.9 集合范畴 Set 中, 任意一个非空集合都是一个单射对象.

例 1.7.10 在紧 Hausdorff 拓扑空间范畴 Hcomp 中, 注意到单态射恰好是闭嵌入映射, 因此由 Tietze-Urysohn 扩张定理可知单位闭区间的任意幂 $[0,1]^I$ 是一个单射对象. 进一步我们可以证明 Hcomp 中的所有单射对象恰好就是单位闭区间 $[0,1]$ 的某个幂的收缩.

练习 1.7

1. 证明若 T 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的终对象, 则 T 是 $\mathcal{C}$ 中的一个单射对象.

2. 证明单射对象的收缩仍然是单射对象.

3. 证明在 T_0 拓扑空间范畴 Top_0 中, 严格单射对象 (extremal mono-injective object) 恰好就是 Sierpinski 空间 S(两点集 $\{0,1\}$ 赋予拓扑 $\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$) 的某个幂 S^I 的收缩.

4. 证明在紧 Hausdorff 拓扑空间范畴 Hcomp 中, 射影对象恰好就是全体紧 Hausdorff 的极不连通空间 (拓扑空间 X 称为极不连通空间是指 X 中的任意一个开子集 U, U 的闭包 $\bar{U}$ 是一个开子集).



第2章 极限理论

在数学研究中, 我们经常会遇到这样的构造：给定某个具体范畴的一个小的子范畴 (也可以看作一个小范畴到该范畴的一个函子的像), 存在一个对象以及该对象到子范畴中的每个对象的一个态射构成的可交换态射族具有“万有性质”, 或者存在一个对象以及子范畴中的每个对象到该对象的一个态射构成的可交换态射族具有“万有性质”. 例如, 给定一族拓扑空间 $\{X_i \mid i \in I\}$, 则积空间 $\prod X_i$ 到每个因子空间的射影族 $\{\pi_i : \prod X_i \to X_i \mid i \in I\}$ 具有“万有性质”：对任意一个拓扑空间 X 以及连续映射族 $\{f_i : X \to X_i \mid i \in I\}$, 存在唯一的连续映射 $f = \langle f_i \rangle : X \to \prod X_i$ 使得每个 f_i 都可以通过 f 分解为 $f_i = \pi_i f$. 这种性质可以抽象为纯粹的范畴性质, 也就是我们本章将要介绍的范畴极限和余极限.

2.1 极限的定义

定义 2.1.1 设 $\mathcal{J}$ 是一个小范畴, 我们称任意一个函子 $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 为范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 $\mathcal{J}$ 型图 (在 $\mathcal{J}$ 明确的情况下可简称为图). 如果 $\mathcal{J}$ 是一个有限范畴 (即 ob$\mathcal{J}$ 是有限集), 则称 $\mathcal{J}$ 型图是一个有限图. 对 $\mathcal{J}$ 中的每个对象 j, 称 $D(j)$ 为该 $\mathcal{J}$ 型图的顶点. 对 $\mathcal{J}$ 中的每个态射 α, 称 $D(\alpha)$ 为该 $\mathcal{J}$ 型图的边.

注意在一些范畴论著作中, 没有对 $\mathcal{J}$ 是一个小范畴的限制, 但是在实际应用中很少涉及 $\mathcal{J}$ 不是小范畴的情形即所谓的“大图表”的极限, 因此我们只讨论“小图表”的极限是恰当的.

例 2.1.2 设 $\mathcal{J}$ 是一个有限范畴 $\cdot \rightrightarrows \cdot$, 则范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 $\mathcal{J}$ 型图可以看作 $\mathcal{C}$ 中的一对平行态射.

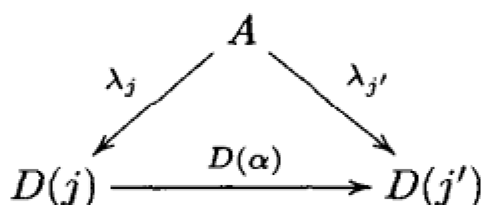
例 2.1.3 设 $\mathcal{J}$ 是一个如图所示的有限范畴

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \rightarrow & \cdot \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \cdot & \rightarrow & \cdot \end{array}$$

则范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 $\mathcal{J}$ 型图可以看作 $\mathcal{C}$ 中的一个交换的方形.

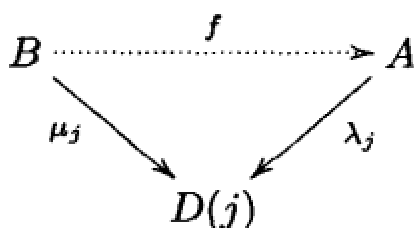
定义 2.1.4 设 $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 是一个 $\mathcal{J}$ 型图, $A \in \text{ob}\mathcal{C}$：

(1) 如果态射族 $\{\lambda_j : A \to D(j) \mid j \in \text{ob}\mathcal{J}\}$ 满足对任意的 $\mathcal{J}$ 态射 $\alpha : j \to j'$ 都有等式 $\lambda_{j'} = D(\alpha)\lambda_j$ 成立, 即下面图表交换：



则称 $\{\lambda_j : A \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是一个 D 上的锥形, A 称为该锥形的顶点.

(2) 如果 $\{\lambda_j : A \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是一个 D 上的锥形, 并且该锥形关于 D 上的任意一个锥形是万有的, 即对任意的 $B \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$ 以及 D 上的一个以 B 为顶点的锥形 $\{\mu_j : B \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$, 存在唯一的态射 $f : B \to A$ 使得等式 $\mu_j = \lambda_j f$ 对每个 $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$ 成立, 即下面的图表交换



则称锥形 $\{\lambda_j : A \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 $\mathcal{J}$ 型图 D 的**极限**(limit).

注意, 在实际应用中, 如果极限锥形中的态射族可以由锥形的顶点明确确定, 我们可以省去态射直接称该顶点为极限.

例 2.1.5　设 $\mathcal{J}$ 是一个空范畴, 则任意范畴 $\mathcal{C}$ 存在唯一的一个 $\mathcal{J}$ 型图, 即空图表. 这时 $\mathcal{C}$ 中任意一个对象 A 都可以看作空图表上的一个锥形, 因此如果空图表的极限存在, 则一定是 $\mathcal{C}$ 中的终对象.

例 2.1.6　设 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴, $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个单位函子. 如果 $\mathcal{C}$ 中存在初始对象 I, 则 I 就是 $1_{\mathcal{C}}$ 的极限. 反之, 若锥形 $\{\lambda_B : A \to B \mid B \in \mathrm{ob}\mathcal{C}\}$ 是 $1_{\mathcal{C}}$ 的极限. 设 $f : A \to B$, 则由锥形定义有 $f\lambda_A = \lambda_B$. 如果取 $f = \lambda_B$, 则有 $\lambda_B\lambda_A = \lambda_B = \lambda_B 1_A$ 对任意的 $B \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$ 成立, 故由极限万有性质可得 $\lambda_A = 1_A$. 这时我们有 $f = f1_A = f\lambda_A = \lambda_B$, 因此对 $\mathcal{C}$ 中的任意对象 B, 恰好有一个态射 $\lambda_B : A \to B$, 即 A 是 $\mathcal{C}$ 中的初始对象.

例 2.1.7　设 I 是一个滤子的偏序集 (filtered partially ordered set), 即对 I 中任意两个元素 i, j, 存在 I 中的元素 k 使得 $k \leqslant i$ 与 $k \leqslant j$ 同时成立. 将 I 看作一个范畴, 对任意一个范畴 $\mathcal{C}$, 如果 $\mathcal{C}$ 上的一个 I 型图 $D : I \to \mathcal{C}$ 满足对任意的 $i \leqslant j \leqslant k$, 都有 $D(j \leqslant k)D(i \leqslant j) = D(i \leqslant k)$ 成立, 则称之为 $\mathcal{C}$ 上的一个逆系统 (inverse system). 考虑集合范畴 Set 上的逆系统的极限情形, 这时一个逆系统可以表示为 $\{(A(i), A(j), f_{ij}) \mid f_{ij} : A(i) \to A(j), i \leqslant j,\ i, j \in I\}$. 令 $A = \{(x_i) \in \prod_{i \in I} A(i) \mid x_j = f_{ij}(x_i), i \leqslant j,\ i, j \in I\}$, 对每个 $i \in I$, $p_i : A \to A(i)$ 是射影, 则不难验证锥形 $\{p_i : A \to A(i) \mid i \in I\}$ 是逆系统的极限. 在拓扑空间范畴

Top 中, 一个逆系统 $\{(X(i), X(j), g_{ij}) \mid g_{ij}: X(i) \to X(j), i \leqslant j,\ i, j \in I\}$ 的极限就是其在集合范畴中的极限赋予乘积空间 $\prod_{i\in I} X_i$ 的子空间拓扑.

设 $D: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 是一个 $\mathcal{J}$ 型图. 考虑以 D 上所有的锥形为对象, 两个 D 上的锥形 $\{\alpha_j : A \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 与 $\{\beta_j : B \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 之间的态射是指态射 $h: A \to B$ 满足 $\alpha_j = \beta_j h$ 对任意的 $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$ 成立, 则不难验证这样构成一个范畴 $\Delta \downarrow D$. 由定义 2.1.4 可以看出 $\mathcal{J}$ 型图 D 的极限恰好就是范畴 $\Delta \downarrow D$ 的终对象. 因此由命题 1.5.9 可得极限如果存在则在同构成的意义下是唯一的, 即下面命题成立.

命题 2.1.8　设 $D: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 是一个 $\mathcal{J}$ 型图. 如果锥形 $\{\lambda_j : A \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 与 $\{\mu_j : B \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 都是 D 的极限, 则存在一个同构 $h: A \to B$ 使得 $\lambda_j = \mu_j h$ 对每个 $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$ 成立.

如果 $\{\lambda_j : A \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 $\mathcal{J}$ 型图 $D: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 的极限, 态射 $f, g: B \to A$ 使得 $\lambda_j f = \lambda_j g$ 对任意的 $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$ 成立, 则 $\{\lambda_j f : B \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 也是一个锥形, 由极限定义的万有性质可知 $f = g$. 因此我们有下面的命题.

命题 2.1.9　设 $\{\lambda_j : A \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 $\mathcal{J}$ 型图 $D: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 的极限, 则 $\{\lambda_j\}_{j\in\mathrm{ob}\mathcal{J}}$ 是一族集体单态射, 即对任意一对态射 $f, g: B \to A$, 若 $\lambda_j f = \lambda_j g$ 对任意的 $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$ 成立, 则 $f = g$.

如果范畴 $\mathcal{D}$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 的一个小的子范畴, 则包含函子 $C: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 $\mathcal{D}$ 型图, 所以我们也可以直接称 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个图.

设 A 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个对象, $\{(A_i, f_i) \mid i \in I\}$ 是 A 的一族子对象, 其中 I 是集合. 将图表 $\{f_i : A_i \to A \mid i \in I\}$ 看作 $\mathcal{C}$ 的一个子范畴, 即可以看作 $\mathcal{C}$ 中的一个图. 若该图的极限存在, 则极限锥形的顶点 C 到 A 的态射完全由 C 到 A 的每个子对象 A_i 的态射确定. 记 C 到子对象 A_i 的态射为 α_i, 则由命题 2.1.9 不难验证 $f_i\alpha_i : C \to A$ 是一个单态射. 因此 $(C, f_i\alpha_i)$ 仍然是 A 的一个子对象, 我们称之为子对象族 $\{(A_i, f_i) \mid i \in I\}$ 的**交**(intersection). 不难看出子对象族 $\{(A_i, f_i) \mid i \in I\}$ 的交就是 $\{(A_i, f_i) \mid i \in I\}$ 在 A 的子对象偏序族 $\mathrm{Sub}(A)$ 中的下确界.

对偶于极限的概念我们可以定义余极限的概念.

定义 2.1.10　设 $D: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 是一个 $\mathcal{J}$ 型图, $A \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$:

(1) 如果态射族 $\{p_j : D(j) \to A \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 满足对任意的 $\mathcal{J}$ 态射 $r: j \to j'$ 都有等式 $p_j = p_{j'}D(r)$ 成立, 即下面图表交换:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ {\scriptstyle p_j}\nearrow & & \nwarrow{\scriptstyle p_{j'}} \\ D(j) & \xrightarrow{D(r)} & D(j') \end{array}$$

则称 $\{p_j : D(j) \to A \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是一个 D 上的余锥形, A 称为余锥形的顶点.

(2) 如果 $\{p_j : D(j) \to A \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是一个 D 上的余锥形并且该锥形关于 D 上的任意一个余锥形是万有的, 即对任意的 $B \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$ 以及 D 上的一个以 B 为顶点的余锥形 $\{q_j : D(j) \to B \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$, 存在唯一的态射 $g : A \to B$ 使得等式 $q_j = gp_j$ 对每个 $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$ 成立, 即下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{g}{\dashrightarrow} & B \\ & {\scriptstyle p_j}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle q_j} & \\ & D(j) & \end{array}$$

则称余锥形 $\{p_j : D(j) \to A \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 $\mathcal{J}$ 型图 D 的**余极限**(colimit).

例 2.1.11 对偶于例 2.1.7, 设 J 是一个定向的偏序集 (directed partially ordered set), 即对 J 中任意两个对象 r, s, 存在 J 中的对象 t 使得 $r \leqslant t,\ s \leqslant t$, 看作一个范畴. 如果范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个 J 型图 $D : J \to \mathcal{C}$ 满足对任意的 $r \leqslant s \leqslant t$, 都有 $D(s \leqslant t)D(r \leqslant s) = D(r \leqslant t)$ 成立, 则称之为范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个定向系统.

考虑拓扑空间范畴 Top 上的定向系统的余极限情形, 这时 J 型图可以表示为 $\{(X(r), X(s), f_{rs}) \mid f_{rs} : X(r) \to X(s), r \leqslant s,\ r, s \in J\}$. 作空间族 $\{X(j) \mid j \in J\}$ 的和空间 $X = \bigcup_{j\in J} X(j) \times \{j\}$, 在 X 上定义一个等价关系 $\sim$ 如下:

$$(x, r) \sim (y, s) \Longleftrightarrow \text{存在 } t \in J, \qquad r \leqslant t, s \leqslant t, f_{rt}(x) = f_{st}(y)$$

对每个 $r \in J$, 令 $q_r : X \to X/\sim$ 是标准的商映射 ($X/\sim$ 是商空间), $g_r : X(r) \to X$ 是标准的嵌入映射. 则不难验证余锥形 $\{q_r g_r : X(r) \to X/\sim \mid r \in J\}$ 是定向系统 $\{(X(r), X(s), f_{rs}) \mid f_{rs} : X(r) \to X(s), r \leqslant s,\ r, s \in J\}$ 的余极限.

对偶于极限的情况, 设 $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 是一个 $\mathcal{J}$ 型图. 考虑以 D 上所有的余锥形为对象, 两个 D 上的余锥形 $\{p_j : D(j) \to A \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 与 $\{q_j : D(j) \to B \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 之间的态射是指态射 $g : A \to B$ 满足 $q_j = gp_j$ 对任意的 $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$ 成立, 则不难验证这样构成一个范畴 $\Delta \uparrow D$. 这时 $\mathcal{J}$ 型图 D 的余极限恰好就是范畴 $\Delta \uparrow D$ 的初始对象. 因此由命题 1.5.9 可得余极限如果存在, 则在同构的意义下是唯一的.

对偶于命题 2.1.9, 我们有下面命题.

命题 2.1.12 设 $\{p_j : D(j) \to A \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 $\mathcal{J}$ 型图 $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 的余极限, 则 $\{p_j\}_{j\in \mathrm{ob}\mathcal{J}}$ 是一族集体满态射, 即对任意一对态射 $f, g : A \to B$, 若 $fp_j = gp_j$ 对任意的 $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$ 成立, 则 $f = g$.

练习 2.1

1. 试不用命题 1.5.9 的结论, 直接证明命题 2.1.8.

2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴, $1_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 是一个单位函子. 证明函子 $1_{\mathcal{C}}$ 存在余极限当且仅当 $\mathcal{C}$ 存在终对象.

3. 证明在群范畴 Gp 中, 一个给定的群 G 的所有子对象的交是平凡群.

4. 证明在拓扑空间范畴 Top 中, 拓扑空间 X 的一族严格子对象的交就是子空间的交.

5. 证明 A 的子对象族 $\{(B_i,f_i)\mid i\in I\}$ 的交就是 $\{(B_i,f_i)\mid i\in I\}$ 在 A 的子对象偏序族 $\mathrm{Sub}(A)$ 中的下确界.

6. 对偶于子对象的交, 试写出一个对象 A 的一族商对象的余交 (cointersection) 的定义.

2.2 等值子和余等值子

从本节开始我们来讨论一些具体的极限构造, 这一节我们来讨论等值子和余等值子的构造.

定义 2.2.1 设 $\mathcal{J}=(\cdot\rightrightarrows\cdot)$, 则范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 $\mathcal{J}$ 型图可以看作 $\mathcal{C}$ 中的一对平行态射 $f,g:A\to B$. 如果该 $\mathcal{J}$ 型图的极限为 $(A\xleftarrow{e}E\xrightarrow{r}B)$, 则由锥形的定义可知 $r=fe=ge$, 即 r 可以完全由 e 确定. 因此可以等价地将该极限记为 $e:E\to A$ 满足 $fe=ge$, 我们称 $e:E\to A$ 为 $f,g:A\to B$ 的 **等值子** (equalizer).

由等值子的定义可以看出, $e:E\to A$ 是平行对 $f,g:A\to B$ 的等值子当且仅当下面条件成立:

(1) $fe=ge$.

(2) 对任意的态射 $e':E'\to A$ 满足 $fe'=ge'$, 存在唯一的态射 $h:E'\to E$ 使得 $e'=eh$ 成立,

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} & B \\ {\scriptstyle h}\uparrow & \nearrow{\scriptstyle e'} & & & \\ E' & & & & \end{array}$$

如果范畴 $\mathcal{C}$ 中的任意一对平行态射 $A\rightrightarrows B$ 都存在等值子, 则我们称范畴 $\mathcal{C}$ 存在等值子.

例 2.2.2 考虑集合范畴 Set. 设 $f,g:A\to B$ 是一对平行映射. 令 $E=\{a\in A\mid f(a)=g(a)\}$ 看作 A 的子集, 即 A 中使得 f 与 g 等值的最大子集, 则包含 $e:E\to A$ 是 $f,g:A\to B$ 的等值子.

例 2.2.3 考虑拓扑空间范畴 Top(或群范畴 Gp). 若 $f,g:A\to B$ 是一对平行的连续映射 (或群同态). 令 $E=\{a\in A\mid f(a)=g(a)\}$ 看作 A 的子空间 (或

子群), 即 A 中使得 f 与 g 等值的最大子空间 (最大子群), 则包含 $e: E \to A$ 是 $f, g: A \to B$ 的等值子.

命题 2.2.4 设 $e: E \to A$ 是 $f, g: A \to B$ 的等值子, 则下面命题等价:

(1) $f = g$.

(2) e 是一个满态射.

(3) e 是一个同构.

(4) $1_A: A \to A$ 是 $f, g: A \to B$ 的等值子.

证明 (1)⇒(4) 容易验证. 由命题 1.4.4 和满态射的定义容易验证 (3)⇒ (2) ⇒ (1). 只需验证 (4)⇒(3), 但是由极限的唯一性可知 e 一定是一个同构. □

定义 2.2.5 如果态射 $e: E \to A$ 是某一对平行态射的等值子, 则称 e 是一个正**则单态射** (regular monomorphism).

由命题 2.1.9, 正则单态射一定是单态射, 但是反之不成立.

例 2.2.6 考虑集合范畴 Set. 设 $e: E \to A$ 是一个包含映射 (即单射), 记 $B = \{0, 1\}$, $f, g: A \to B$ 满足对任意的 $x \in A, f(x) = 0$, 而 $g(x) = 0$ 当且仅当 $x \in E$. 则容易验证 $e: E \to A$ 是 $f, g: A \to B$ 的等值子, 因此是正则单态射. 从而在集合范畴中正则单态射恰好就是包含映射.

例 2.2.7 考虑拓扑空间范畴 Top. 如果 $e: E \to A$ 是包含映射, 类似于定义 2.2.5(这时将两点集 B 赋予平庸拓扑) 可证 $e: E \to A$ 是一对平行的连续映射的等值子, 故 e 是正则单态射. 反之, 若 $e: E \to A$ 是一个正则单态射, 则存在一对平行的连续映射 $f, g: A \to B$ 使得 $e: E \to A$ 是 $f, g: A \to B$ 的等值子. 但是子空间包含 $\{x \in A \mid f(x) = g(x)\} \to A$ 也是 $f, g: A \to B$ 的等值子, 因此由极限的唯一性可知 E 与 A 的子空间 $\{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$ 同胚. 从而正则单态射恰好就是子空间包含. 结合例 1.4.1 我们可知在范畴 Top 中, 单态射不必是正则单态射.

例 2.2.8 考虑 Hausdorff 拓扑空间范畴 Haus. 设 $f, g: A \to B$ 是一对连续映射, 则子空间包含 $e: E = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\} \to A$ 是 $f, g: A \to B$ 的等值子, 并且由 Hausdorff 性可知 E 是 A 的闭子空间. 反之, 设 $e: E \to A$ 是闭嵌入. 记 $A' = A \amalg A$ 为 A 与 A 的和空间, p_1 与 p_2 是 A 到 A' 的两个嵌入映射. 设 $\sim$ 是 A' 上包含 $\{(p_1(t), p_2(t)) \in A' \times A' \mid t \in E\}$ 的最小等价关系, $q: A' \to A/\sim$ 是商映射, 则商空间 $A/\sim$ 是 Hausdorff 空间. 容易验证 $e: E \to A$ 是 $qp_1, qp_2: A \to A/\sim$ 的等值子. 因此在范畴 Haus 中正则单态射恰好就是闭子空间包含.

例 2.2.9 群范畴 Gp 中, 正则单态射就是单射, 因此群范畴中正则单态射与单态射是相同的. 事实上, 设 $e: A \to B$ 是一个单射. 记 $C = B/e(A), f: B \to C$ 是商同态, $g: B \to C$ 是零同态. 则容易验证 $e: A \to B$ 是 f 与 g 的等值子.

例 2.2.10 环范畴 Rng 中, 单态射未必是正则单态射. 例如, 整数环到有理数环的包含映射 $i: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ 是环范畴中的单态射同时也是满态射, 如果 i 是正则单态

射, 则由命题 2.2.4 可得 i 是一个同构, 因此 i 不是正则单态射.

对偶地我们可以给出余等值子的定义.

定义 2.2.11 设 $f, g: A \to B$ 是一对平行态射, 如果态射 $c: B \to C$ 满足:

(1) $cf = cg$.

(2) 对任意的态射 $c': B \to C'$ 满足 $c'f = c'g$, 存在唯一的态射 $r: C \to C'$ 使得 $c' = rc$ 成立,

$$\begin{array}{ccccc} A & \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} & B & \xrightarrow{c} & C \\ & & & \searrow^{c'} & \vdots\, r \\ & & & & C' \end{array}$$

则称 $c: B \to C$ 是 $f, g: A \to B$ 的 **余等值子** (coequalizer).

由定义容易看出, 余等值子其实就是一对平行态射 (看作一个 $\mathcal{J}$ 型图) 的余极限.

例 2.2.12 考虑集合范畴 Set. 设 $f, g: A \to B$ 是一对平行映射, E 是集合 B 上包含 $\{(f(a), g(a)) \mid a \in A\}$ 的最小等价关系, 则容易验证自然的商映射 $q: B \to B/E$ 是 $f, g: A \to B$ 的余等值子.

例 2.2.13 在拓扑空间范畴 Top 中, 若 $f, g: X \to Y$ 是一对平行连续射. 设 E 是定义 2.2.11 中的等价关系, 赋予 Y/E 商拓扑 (使得商映射 q 连续的最细的拓扑), 则容易验证 $q: Y \to Y/E$ 是 $f, g: X \to Y$ 的余等值子.

对偶于命题 2.2.4, 我们有下面命题.

命题 2.2.14 设 $c: B \to C$ 是 $f, g: A \to B$ 的余等值子, 则下面命题等价:

(1) $f = g$.

(2) c 是一个单态射.

(3) c 是一个同构.

(4) $1_B: B \to B$ 是 $f, g: A \to B$ 的余等值子.

定义 2.2.15 如果态射 $c: B \to C$ 是某一对平行态射的余等值子, 则称 c 是一个 **正则满态射** (regular epimorphism).

例 2.2.16 考虑集合范畴 Set. 由例 2.1.12 知正则满态射是满态射, 从而是满射. 反之若 $f: A \to B$ 是一个满射, 记 $D = \{(a, a') \in A \times A \mid f(a) = f(a')\}$, $p, p': D \to A$ 是射影. 则容易验证 $f: A \to B$ 是 $p, p': D \to A$ 的余等值子. 因此在集合范畴 Set 中, 正则满态射与满态射相同, 恰好就是所有的满映射.

例 2.2.17 考虑拓扑空间范畴 Top. 由例 2.2.13 以及余等值子的唯一性可知正则满态射是拓扑商映射. 反之设 $f: A \to B$ 是一个拓扑商映射, 类似于例 2.2.16(赋

予 D 乘积空间的子空间拓扑), 容易验证 $f: A \to B$ 是射影 $p, p': D \to A$ 的余等值子. 因此在拓扑空间范畴 Top 中, 正则满态射恰好就是拓扑商映射.

由例 2.2.17 我们可以得出在拓扑空间范畴 Top 中, 满态射不一定是正则满态射, 事实上我们只要取一个连续满映射但不是商映射的例子即可.

练习 2.2

1. 直接证明命题 2.2.14.

2. 证明如果态射 $f: A \to B$ 存在左逆, 则 f 是一个正则单态射. 对偶地如果 $f: A \to B$ 存在右逆, 则 f 是一个正则满态射.

3. 证明正则单态射一定是严格单态射.

4. 设 $e: A \to B$ 是一个满态射, 证明态射 $c: C \to D$ 是平行对 $f, g: B \to C$ 的余等值子当且仅当 $c: C \to D$ 是平行对态射 $fe, ge: A \to C$ 的余等值子.

5. 证明在紧 Hausdorff 拓扑空间范畴 Hcomp 中, 单态射是正则单态射, 满态射是正则满态射. 证明该结论在 Abel 群范畴 AbGp 中仍然成立.

6. 设 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个函子. 如果对范畴 $\mathcal{C}$ 中的任意一个态射 $e: E \to A$ 和一对平行态射 $f, g: A \to B$ 使得在范畴 $\mathcal{D}$ 中 $F(e): F(E) \to F(A)$ 是平行对 $F(f), F(g): F(A) \to F(B)$ 的等值子, 则 $e: E \to A$ 是 $f, g: A \to B$ 的等值子, 我们称函子 F 反射等值子. 证明如果函子 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 反射等值子, 则 F 一定是一个局部单函子.

2.3 积和余积

乘积的概念在数学研究中经常见到, 如集合的 Cartesian 乘积、积拓扑空间和积代数等. 他们的共同特点是由一个对象以及一族射影组成并且满足万有性质. 我们可以将其抽象为范畴的概念如下.

定义 2.3.1 设 $\mathcal{J}$ 是一个离散的小范畴, 则范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 $\mathcal{J}$ 型图是一个离散的图表. 如果该 $\mathcal{J}$ 型图的极限 $\{p_j : P \to A_j \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 存在, 我们称 $\{p_j : P \to A_j \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是对象族 $\{A_j\}_{j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}}$ 的**积** (product), 称每个 p_j 为射影 (projection).

由极限定义我们可以知道, 任意范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族以集合为指标的对象 $\{A_j\}_{j \in J}$ 都可以看作一个离散图表. 则 $\{p_j : P \to A_j \mid j \in J\}$ 是该对象族的积当且仅当其满足万有性质, 即对任意一族态射 $\{q_j : Q \to A_j \mid j \in J\}$, 存在唯一的态射 $r: Q \to P$ 使得 $q_j = p_j r$ 对任意的 $j \in J$ 成立, 即任意的 $j \in J$ 下面的图表交换:

$$
\begin{array}{ccc}
Q & \overset{r}{\dashrightarrow} & P \\
 & {\scriptstyle q_j}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_j} & \\
 & A_j &
\end{array}
$$

例 2.3.2 考虑集合范畴 Set. 设 $\{A_j\}_{j\in J}$ 是一族集合, $\prod A_j$ 是其 Cartesian 乘积, 对每个 $j\in J, p_j:\prod A_j\to A_j$ 是射影, 则 $\{p_j:\prod A_j\to A_j\mid j\in J\}$ 是 $\{A_j\}_{j\in J}$ 的范畴积.

例 2.3.3 拓扑空间范畴 Top(或群范畴 Gp) 中的情形类似于集合范畴, 另外在其 Cartesian 积上赋予积拓扑 (逐点运算).

例 2.3.4 设 X 是一个偏序集看作一个范畴, 则 X 中一族对象的积就是它们的下确界.

例 2.3.5 只有一个对象的对象族 $\{A\}$, 其积是一个同构 $B\to A$.

定义 2.3.6 如果一个范畴中的任意一族具有集合指标的对象 $\{A_j\}_{j\in J}$ 存在积, 则称该范畴存在积. 特别地如果任意有限多个对象存在积, 则称该范畴存在有限积.

设 $A_1,\cdots,A_n$ 是一个范畴中的对象, 则不难验证 $(\cdots((A_1\times A_2)\times A_3)\times\cdots\times A_n)$ 就是 $\{A_i\mid i=1,\cdots,n\}$ 的积. 由于空图表的极限就是终对象, 结合定义 2.3.6 我们有下面命题.

命题 2.3.7 一个范畴存在有限积当且仅当存在终对象和二个对象的积.

例 2.3.8 集合范畴 Set, 群范畴 Gp, 环范畴 Rng, 拓扑空间范畴 Top 和关系范畴 Rel 中都存在积.

例 2.3.9 度量空间范畴 Met 中只存在可数积. 一个偏序集看作一个范畴存在有限积当且仅当该偏序集是一个交半格, 存在积当且仅当该偏序集是一个完备格.

定义 2.3.10 设范畴 $\mathcal{C}$ 存在积. $\{f_i:A_i\to B_i\mid i\in I\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一族态射 (I 是集合) , $\{p_j:\prod A_i\to A_j\mid j\in I\}$ 与 $\{r_j:\prod B_i\to B_j\mid j\in I\}$ 分别是 $\{A_i\}_{i\in I}$ 与 $\{B_i\}_{i\in I}$ 的积. 则存在唯一的态射 $\prod f_i:\prod A_i\to\prod B_i$ 使得下面的图表交换成立:

$$\begin{array}{ccc}\prod A_i & \xrightarrow{\prod f_i} & \prod B_i \\ {\scriptstyle p_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_j} \\ A_j & \xrightarrow{f_j} & B_j\end{array}$$

我们称该态射为态射族 $(f_i)_{i\in I}$ 的积. 如果 $I=\{1,\cdots,n\}$, 则 $\prod f_i$ 经常记作 $f_1\times\cdots\times f_n$.

引理 2.3.11 若每个 $i\in I$, $f_i:A_i\to B_i$ 是单态射, 则 $\prod f_i:\prod A_i\to\prod B_i$ 是单态射.

证明　设 $g,h:C\to\prod A_i$ 满足 $(\prod f_i)g=(\prod f_i)h$,

$$\begin{array}{ccccc} C & \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} & \prod A_i & \xrightarrow{\prod f_i} & \prod B_i \\ & & {\scriptstyle p_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_j} \\ & & A_j & \xrightarrow{f_j} & B_j \end{array}$$

则对任意的 $i\in I$, 我们有 $f_ip_ig=f_ip_ih$ 成立, 故有 $p_ig=p_ih$. 由命题 2.1.9 可得 $g=h$. □

命题 2.3.12　设范畴 $\mathcal{C}$ 存在积. I 是集合, 对每个 $i\in I$, $e_i:E_i\to A_i$ 是 $f_i,g_i:A_i\to B_i$ 的等值子, 则 $\prod e_i:\prod E_i\to\prod A_i$ 是 $\prod f_i,\prod g_i:\prod A_i\to\prod B_i$ 的等值子.

证明　对每个 $j\in I$, 设 $p_j:\prod A_i\to A_j,q_j:\prod B_i\to B_j,r_j:\prod E_i\to E_j$ 是射影

$$\begin{array}{ccccc} \prod E_i & \xrightarrow{\prod e_i} & \prod A_i & \overset{\prod f_i}{\underset{\prod g_i}{\rightrightarrows}} & \prod B_i \\ {\scriptstyle r_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_j} & & \downarrow{\scriptstyle q_j} \\ E_j & \xrightarrow{e_j} & A_j & \overset{f_j}{\underset{g_j}{\rightrightarrows}} & B_j \end{array}$$

首先我们有 $(\prod f_i)(\prod e_i)=\prod(f_ie_i)=\prod(g_ie_i)=(\prod g_i)(\prod e_i)$. 若 $h:C\to\prod A_i$ 满足 $(\prod f_i)h=(\prod g_i)h$, 则有 $f_jp_jh=g_jp_jh$ 对每个 $j\in I$ 成立. 因此对每个 $j\in I$ 存在一个态射 $h_j:C\to E_j$ 使得 $p_jh=e_jh_j$, 从而由积的万有性质存在态射 $\hat{h}:C\to\prod E_i$ 使得 $h_j=r_j\hat{h}$ 对每个 $j\in I$ 成立. 这时 $p_j(\prod e_i)\hat{h}=e_jr_j\hat{h}=e_jh_j=p_jh$, 由命题 2.1.9 可得 $(\prod e_i)\hat{h}=h$. 另外由于每个 e_i 均是单态射, 结合引理 2.3.11 可知满足 $(\prod e_i)\hat{h}=h$ 的 $\hat{h}$ 是唯一的. □

推论 2.3.13　一族正则单态射的积仍然是正则单态射.

对偶于积的概念我们可以定义余积的概念.

定义 2.3.14　设 $\{A_j\}_{j\in J}$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个离散图表, 若该图表的余极限 $\{q_j:A_j\to Q\mid j\in\mathcal{J}\}$ 存在, 我们称 $\{q_j:A_j\to Q\mid j\in\mathcal{J}\}$ 是对象族 $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ 的**余积** (coproduct), 称每个 q_j 为余射影 (coprojection).

例 2.3.15　考虑集合范畴 Set. 设 $\{A_j\}_{j\in J}$ 是一族集合, 作 $\{A_j\}_{j\in J}$ 的不交并 $\coprod A_j=\bigcup_{j\in J}(A_j\times\{j\})$, 对每个 $j\in J$ 记 $q_j:A_j\to\coprod A_j$ 为自然的包含映射, 则 $\{q_j:A_j\to\coprod A_j\mid j\in J\}$ 是 $\{A_j\}_{j\in J}$ 的余积.

例 2.3.16　在拓扑空间范畴 Top 中, 余积就是拓扑和 (不交并赋予使每个包含映射连续的最粗的拓扑). 在紧 Hausdorff 拓扑空间范畴 Hcomp 中, 余积是拓扑和的 Stone-Čech 紧化.

例 2.3.17　在群范畴 Gp 中, 余积就是群的自由积.

一个小范畴存在积 (或余积) 是一个很强的条件, 事实上我们有下面的命题.

命题 2.3.18 设小范畴 $\mathcal{C}$ 存在积 (或余积), 则对任意的 $A, B \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, 态射集 $\mathcal{C}(A, B)$ 最多只有一个元素. 因此任意一个存在积 (或余积) 的小范畴都同构于一个预序集使得任意一族元素都存在一个最大的下界 (或最小的上界).

证明 若 $\mathcal{C}$ 存在积. 设 $A, B \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$ 使得态射集 $\mathcal{C}(A, B)$ 含有两个以上的元素, 取 $f, g \in \mathcal{C}(A, B), f \neq g$. 令集合 $\mathrm{Mor}\mathcal{C}$ 的基数 $\mathrm{card}(\mathrm{Mor}\mathcal{C}) = t$. 考虑 B 的 t 次幂 $\{p_j : B^t \to B \mid j \leqslant t\}$. 由积的定义我们有 $\mathrm{card}(\mathcal{C}(A, B^t)) \geqslant 2^t$, 与 $\mathrm{card}(\mathrm{Mor}\mathcal{C}) = t$ 矛盾. 因此 $\mathcal{C}(A, B)$ 最多含有一个元素. 对偶地可证余积的情形. □

练习 2.3

1. 证明点拓扑空间范畴 Top* 存在有限积和有限余积.

2. 证明链复形范畴 (见 1.1 节练习 4) 范畴存在积和余积.

3. 设范畴 $\mathcal{C}$ 存在积, $\{p_j : \prod A_j \to A_j \mid j \in J\}$ 是对象族 $\{A_j\}_{j\in J}$ 的积. 如果每个 $A_j = A$, 则将 $\prod A_j$ 记作 A^J, 称为 A 的 J 幂. 证明对象 C 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个余分离子当且仅当 $\mathcal{C}$ 中的任意对象都是 C 的某个幂的子对象.

4. 举例说明满态射的积不必是满态射, 对偶地单态射的余积不必是单态射.

5. 证明一个非平凡的群看作一个范畴不存在有限积和有限余积.

6. 对偶于定义 2.3.10, 写出一族态射余积的定义并直接证明一族正则满态射的余积仍然是一个正则满态射.

7. 设 $\{A_i \mid i \in I\}$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族对象, 则 $\{A_i \mid i \in I\}$ 中的元素的有限积的全体构成一个滤子图 $\{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_n} \mid i_j \in I, j = 1, \cdots, n, n \in \mathbb{Z}\}$. 证明 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的积同构于 $\{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_n} \mid i_j \in I, j = 1, \cdots, n, n \in \mathbb{Z}\}$ 的滤子极限.

2.4 拉回与推出

定义 2.4.1 设 $\mathcal{J} = (\cdot \to \cdot \leftarrow \cdot)$. 则范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 $\mathcal{J}$ 型图为

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

若该 $\mathcal{J}$ 型图的极限存在, 则可以看作 $\mathcal{C}$ 中的一个交换的方形

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\bar{f}} & B \\ {\scriptstyle \bar{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

我们称该方形是一个 **拉回方形** (pullback square), $\bar{g}$ 称为 g 沿着 f 的 **拉回** (pullback)($\bar{f}$ 称为 f 沿着 g 的拉回).

由极限定义可以看出, $\mathcal{C}$ 中的一个方形

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{t} & B \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

是一个拉回方形当且仅当它是交换的并且对任意的交换方形

$$\begin{array}{ccc} \hat{P} & \xrightarrow{p} & B \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

存在唯一的态射 $h:\hat{P}\to P$ 使得 $p=th$, $q=rh$, 即下面图表交换

$$\begin{array}{cccc} \hat{P} & & & \\ & \overset{h}{\searrow} & \overset{p}{\longrightarrow} & \\ {\scriptstyle q}\searrow & P & \xrightarrow{t} & B \\ & {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ & A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

如果范畴 $\mathcal{C}$ 中的任意一个形如 $A\to C\leftarrow B$ 的图表都存在极限, 则称该范畴存在拉回.

例 2.4.2　集合范畴 Set 存在拉回. 事实上图表 $A\xrightarrow{f}C\xleftarrow{g}B$ 的极限可表达为积 $A\times B$ 的子集 $A\times_C B=\{(a,b)\in A\times B\mid f(a)=g(b)\}$ 为顶点的锥形, $A\times_C B$ 到 A 与 B 的映射为射影. 即下面方形是一个拉回方形

$$\begin{array}{ccc} A\times_C B & \xrightarrow{p_B} & B \\ {\scriptstyle p_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow[f]{} & C \end{array}$$

因此我们有时也把拉回称作 **纤维积** (fibre product).

在上面的例子中, 拉回 (纤维积) 可以看作平行映射 $fp_A, gp_B : A\times B\to C$ 的等值子, 其中 $p_A: A\times B\to A$ 与 $p_B: A\times B\to B$ 是射影. 这个事实在一般的范畴中仍然成立, 即拉回可以由积和等值子完全确定.

命题 2.4.3 设 $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一对态射, $A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$ 是 A 与 B 的积, $e : E \to A \times B$ 是平行态射 $f\pi_A, g\pi_B : A \times B \to C$ 的等值子, 则下面方形是一个拉回方形

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi_B e} & B \\ {\scriptstyle \pi_A e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

证明 由题设条件方形的交换性是明显的. 设

$$\begin{array}{ccc} \hat{E} & \xrightarrow{s} & B \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

是一个交换的方形. 则由积的定义存在一个态射 $\langle r, s \rangle : \hat{E} \to A \times B$ 使得 $r = \pi_A\langle r, s\rangle, s = \pi_B\langle r, s\rangle$, 因此有 $f\pi_A\langle r, s\rangle = g\pi_B\langle r, s\rangle$. 由于 $e : E \to A \times B$ 是 $f\pi_A, g\pi_B : A \times B \to C$ 的等值子, 存在一个态射 $h : \hat{E} \to E$ 使得 $\langle r, s\rangle = eh$. 从而有 $r = \pi_A\langle r, s\rangle = \pi_A eh, s = \pi_B\langle r, s\rangle = \pi_B eh$. 由命题 2.1.9 满足该条件的 h 是唯一的. □

定义 2.4.4 给定范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族态射 M, 如果对任意的 $g \in M$, g 沿着任一态射 f 的拉回 $\bar{g}$ 仍然属于 M, 我们称态射族 M 是 **拉回保持的** (pullback stable).

命题 2.4.5 单态射族和正则单态射族都是拉回保持的.

证明 设下面图表是一个拉回方形

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\bar{f}} & B \\ {\scriptstyle \bar{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

其中 f 是一个单态射. 若 $u, v : Q \to P$ 满足 $\bar{f}u = \bar{f}v$, 则 $f(\bar{g}u) = (f\bar{g})u = (g\bar{f})u = g(\bar{f}u) = g(\bar{f}v) = f(\bar{g}v)$, 因此 $\bar{g}u = \bar{g}v$. 由命题 2.1.9 可知 $u = v$.

如果在上面的拉回方形中 f 是平行对态射 $p, q : C \to R$ 的等值子, 则

$$(pg)\bar{f} = (pf)\bar{g} = (qf)\bar{g} = q(g\bar{f}) = (qg)\bar{f}.$$

若 $\hat{f} : \hat{P} \to B$ 满足 $(pg)\hat{f} = (qg)\hat{f}$, 则存在一个态射 $t : \hat{P} \to A$ 使得 $g\hat{f} = ft$, 由拉回定义存在态射 $h : \hat{P} \to P$ 使得 $\hat{f} = \bar{f}h$. 另外由于正则单态射是单态射以及前面的证明可知 $\bar{f}$ 是单态射, 故满足这样条件的 h 是唯一的. 这样我们就证明了 $\bar{f}$ 是平行对态射 $pg, qg : B \to R$ 的等值子. □

设 (A,m) 是 C 的一个子对象，$f:B\to C$ 是一个态射. 由命题 2.4.5 可知 $m:A\to C$ 沿着 $f:B\to C$ 的拉回是 B 的一个子对象，称之为 A 在 f 下的逆象，记作 $f^{-1}(A)$. 例如，在集合范畴中，若 A 是 C 的一个子集，$f:B\to C$ 是一个映射，$f^{-1}(A)$ 是 A 在 f 下的原像，则容易验证下面图表是一个拉回方形

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(A) & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

对偶于拉回方形，我们可以引入推出方形 (pushout square) 的概念.

定义 2.4.6　设 $\mathcal{J}=(\cdot\leftarrow\cdot\rightarrow\cdot)$. 则范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 $\mathcal{J}$ 型图为

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

若该 $\mathcal{J}$ 型图的余极限存在，则可以看作 $\mathcal{C}$ 中的一个交换的方形

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{g}} \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & P \end{array}$$

我们称该方形是一个**推出方形** (pushout square)，$\bar{g}$ 称为 g 沿着 f 的**推出** (pushout)($\bar{f}$ 称为 f 沿着 g 的推出).

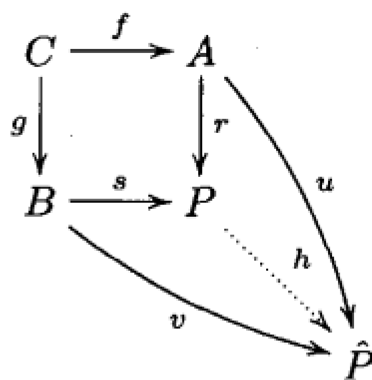
由余极限的定义可以看出，$\mathcal{C}$ 中的一个方形

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ B & \xrightarrow{s} & P \end{array}$$

是一个推出方形当且仅当它是交换的并且对 $\mathcal{C}$ 中的一个任意的交换方形

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B & \xrightarrow{v} & \hat{P} \end{array}$$

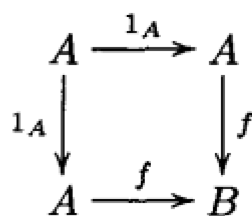
存在唯一的态射 $h: P \to \hat{P}$ 使得 $u = hr$, $v = hs$, 即下面图表交换



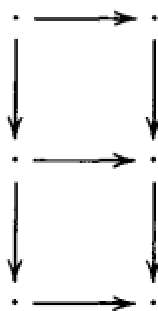
由于推出方形与拉回方形是对偶概念, 因此由对偶原理我们可以得到命题 2.4.3 与命题 2.4.5 的对偶命题, 即推出可以由余积和余等值子完全表达, 并且满态射的推出是满态射, 正则满态射的推出是正则满态射.

练习 2.4

1. 证明 $f: A \to B$ 是单态射当且仅当下面图表是一个拉回方形:



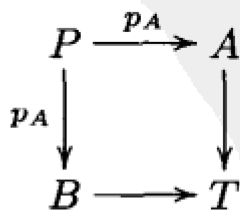
2. 若下面图表中的上下两个方形都是拉回方形, 证明外面的大方形仍然是一个拉回方形:



3. 试直接证明命题 2.4.3 与命题 2.4.5 的对偶命题.

4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, $B \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$. 证明切片范畴 $\mathcal{C}/B$ 中的两个对象 $f: A \to B$ 与 $g: C \to B$ 的积就是范畴 $\mathcal{C}$ 中 $f: A \to B$ 沿着 $g: C \to B$ 的拉回.

5. 设 T 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的终对象, 证明下面方形是一个拉回方形当且仅当 P 是 A 与 B 的积使得 p_A 与 p_B 成为射影.



6. 举例说明满态射不是拉回保持的.

7. 设 (B,f) 与 (C,g) 是 A 的两个子对象. 证明 A 的子对象 (D,h) 是 (B,f) 与 (C,g) 的交当且仅当存在一个拉回方形

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\bar{g}} & B \\ {\scriptstyle\bar{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ C & \xrightarrow{g} & A \end{array}$$

使得 $h = f\bar{g} = g\bar{f}$.

2.5　完备范畴和余完备范畴

本节我们来讨论一个给定范畴中存在极限和余极限的情况.

定义 2.5.1　如果范畴 $\mathcal{C}$ 中的任意 $\mathcal{J}$ 型图 (有限 $\mathcal{J}$ 型图) 都存在极限, 则称 $\mathcal{C}$ 是一个**完备范畴** (complete category)(**有限完备范畴** (finitely complete category)).

对偶地我们可以定义**余完备范畴** (cocomplete category)(**有限余完备范畴** (finitely cocomplete category)).

定理 2.5.2　设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, 下列命题等价:

(1) $\mathcal{C}$ 是有限完备的.

(2) $\mathcal{C}$ 中存在有限积和等值子.

(3) $\mathcal{C}$ 中存在拉回和终对象.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2) 是显然的.

(2) $\Rightarrow$ (3) 由命题 2.3.7 和命题 2.4.3.

(3) $\Rightarrow$ (2): 由命题 2.3.7 欲证 $\mathcal{C}$ 中存在有限积只需说明其存在二元积, 但是对任意的 $A, B \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, 容易验证在下面的拉回方形中 $A \leftarrow P \rightarrow B$ 就是 A 与 B 的积 (其中 T 是终对象)

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & T \end{array}$$

设 $f, g : A \rightarrow B$ 是一对平行态射, $A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$ 是 A 与 B 的积. 由积的万有性质存在态射 $\langle 1_A, f\rangle : A \rightarrow A \times B$ 与 $\langle 1_A, g\rangle : A \rightarrow A \times B$.

$$\begin{array}{ccccc} & & A \times B & & \\ & \swarrow{\scriptstyle\pi_A} & \langle 1_A,g\rangle \Uparrow \langle 1_A,f\rangle & {\scriptstyle\pi_B}\searrow & \\ A & \xleftarrow{1_A} & A & \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} & B \end{array}$$

考虑下面的拉回方形

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e_1} & A \\ {\scriptstyle e_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \langle 1_A, f\rangle} \\ A & \xrightarrow{\langle 1_A, g\rangle} & A\times B \end{array}$$

我们有 $e_1 = 1_A e_1 = (\pi_A\langle 1_A, f\rangle)e_1 = \pi_A(\langle 1_A, f\rangle e_1) = \pi_A(\langle 1_A, g\rangle e_2) = e_2$, 并且 $fe_1 = \pi_B\langle 1_A, f\rangle e_1 = \pi_B\langle 1_A, g\rangle e_2 = ge_2 = ge_1$.

若 $k : K \to A$ 满足 $fk = gk$, 则有 $\pi_B\langle 1_A, f\rangle k = \pi_B\langle 1_A, g\rangle k$, $\pi_A\langle 1_A, f\rangle k = \pi_A\langle 1_A, g\rangle k$. 因此由命题 2.1.9 可知 $\langle 1_A, f\rangle k = \langle 1_A, g\rangle k$, 进一步由拉回的万有性质存在唯一的态射 $h : K \to E$ 使得 $k = e_1 h$.

$$\begin{array}{cccc} K & & & \\ & \overset{h}{\searrow} & \overset{k}{\searrow} & \\ {\scriptstyle k}\searrow & E & \xrightarrow{e_1} & A \\ & {\scriptstyle e_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \langle 1_A, f\rangle} \\ & A & \xrightarrow{\langle 1_A, g\rangle} & A\times B \end{array}$$

这样就证明了 $e_1 : E \to A$ 是平行对态射 $f, g : A \to B$ 的等值子.

(2) $\Rightarrow$ (1): 设 $\mathcal{J}$ 是一个有限范畴, $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 是一个图. 下面我们利用有限积和等值子来构造 $\mathcal{J}$ 型图 D 的极限.

首先我们形成两个积:

$$\Big(P = \prod_{j\in \mathrm{ob}\mathcal{J}} D(j) \xrightarrow{\pi_i} D(i)\Big)_{i\in \mathrm{ob}\mathcal{J}}$$

以及

$$\Big(Q = \prod_{\alpha\in \mathrm{Mor}\mathcal{J}} D(\mathrm{cod}(\alpha)) \xrightarrow{p_\beta} D(\mathrm{cod}(\beta))\Big)_{\beta\in \mathrm{Mor}\mathcal{J}}.$$

对每个 $\alpha \in \mathrm{Mor}\mathcal{J}$, 存在两个态射:

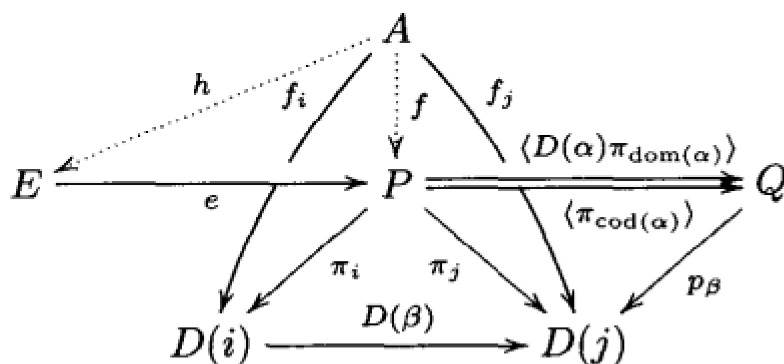
$$\pi_{\mathrm{cod}(\alpha)} : P \to D(\mathrm{cod}(\alpha)) \text{ 及 } D(\alpha)\pi_{\mathrm{dom}(\alpha)} : P \to D(\mathrm{cod}(\alpha)),$$

由积的万有性质存在一对平行态射:

$$\langle \pi_{\mathrm{cod}(\alpha)}\rangle, \langle D(\alpha)\pi_{\mathrm{dom}(\alpha)}\rangle : P \to Q.$$

设 $e : E \to P$ 是这一对平行态射的等值子, 则对 $\mathcal{J}$ 中任意态射 $\beta : i \to j$ 有 $\pi_j e = \pi_{\mathrm{cod}(\beta)} e = p_\beta\langle \pi_{\mathrm{cod}(\alpha)}\rangle e = p_\beta\langle D(\alpha)\pi_{\mathrm{dom}(\alpha)}\rangle e = D(\beta)\pi_{\mathrm{dom}(\beta)} e = D(\beta)\pi_i e$, 因此 $\{\pi_i e : E \to D(i) \mid i \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 D 上的一个锥形. 我们来证明锥形 $\{\pi_i e : E \to$

$D(i) \mid i \in \text{ob}\mathcal{J}\}$ 是 D 的极限.



设 $\{f_i : A \to D(i) \mid i \in \text{ob}\mathcal{J}\}$ 是 D 上的一个锥形, 则由积的万有性质存在态射 $f = \langle f_i \rangle : A \to P$. 对 $\mathcal{J}$ 中任意态射 $\beta : i \to j$ 我们有

$$p_\beta \langle \pi_{\text{cod}(\alpha)} \rangle f = \pi_j f = f_j = D(\beta) f_i = D(\beta)\pi_i f = p_\beta \langle D(\alpha)\pi_{\text{dom}(\alpha)} \rangle f.$$

由命题 2.1.9 可得 $\langle \pi_{\text{cod}(\alpha)} \rangle f = \langle D(\alpha)\pi_{\text{dom}(\alpha)} \rangle f$, 因此由等值子的万有性质存在唯一的态射 $h : A \to E$ 使得 $f = eh$, 从而 $f_j = \pi_j eh$ 对任意的 $j \in \text{ob}\mathcal{J}$ 成立. 同理由命题 2.1.9 可知满足这样条件的 h 是唯一的. □

类似于上面命题的证明我们可以进一步有下面的结果.

定理 2.5.3　范畴 $\mathcal{C}$ 是完备的当且仅当 $\mathcal{C}$ 存在积和等值子.

由对偶原理, 我们可以得到范畴的有限余完备性和余完备性刻画定理如下.

定理 2.5.4　设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, 下面命题等价:

(1) $\mathcal{C}$ 是有限余完备的.

(2) $\mathcal{C}$ 中存在有限余积和余等值子.

(3) $\mathcal{C}$ 中存在推出和初始对象.

定理 2.5.5　范畴 $\mathcal{C}$ 是余完备的当且仅当 $\mathcal{C}$ 存在余积和余等值子.

例 2.5.6　考虑集合范畴 Set, 我们知道集合范畴中存在积和等值子, 因此是完备的. 并且集合范畴中存在余积和余等值子, 因此是余完备的. 类似地我们有拓扑空间范畴 Top、群范畴 Gp 和紧 Hausdorff 拓扑空间范畴 Hcomp 是完备和余完备范畴.

例 2.5.7　有限集合范畴 Fset 是有限完备和有限余完备的但既不是完备的也不是余完备的.

练习 2.5

1. 证明一个偏序集 P 看作一个范畴是有限完备的当且仅当 P 存在有限并和最大元, 对偶地 P 是有限余完备的当且仅当 P 存在有限交和最小元. 进一步证明 P 是完备的 (或余完备的) 当且仅当 P 是一个完备格, 从而 P 是完备的当且仅当 p 是余完备的.

2. 举例说明一个完备 (余完备) 范畴的子范畴不必是完备 (余完备) 的.
3. 证明范畴 $\mathcal{C}$ 是有限完备的当且仅当 $\mathcal{C}$ 存在有限积和子对象的有限交.
4. 证明两个完备 (余完备) 范畴的乘积范畴仍然是一个完备 (余完备) 范畴.

2.6 保持极限的函子

本节我们来讨论函子与极限的关系.

定义 2.6.1 设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个函子, $\mathcal{J}$ 是一个小范畴. 如果对范畴 $\mathcal{C}$ 中的任意一个 $\mathcal{J}$ 型图 $D:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$ 的极限 $\{\lambda_j : A\to D(j)\mid j\in ob\mathcal{J}\}$, 都有 $\{F(\lambda_j):F(A)\to FD(j)\mid j\in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 $\mathcal{J}$ 型图 $FD:\mathcal{J}\to\mathcal{D}$ 的极限, 则称函子 F 保持 $\mathcal{J}$ 型图的极限.

如果对任意的小范畴 $\mathcal{J}$, F 保持 $\mathcal{J}$ 型图的极限, 则称 F **保持极限**.

具体地如果 F 保持 $\mathcal{J}=(\cdot\rightrightarrows\cdot)$ 型图的极限, 则称 F 保持等值子; 如果 F 保持离散图表的极限, 则称 F 保持积; 如果 F 保持 $\mathcal{J}=(\cdot\to\cdot\leftarrow\cdot)$ 型图的极限, 则称 F 保持拉回.

对偶地我们可以定义 F 保持 ($\mathcal{J}$ 型图) 余极限的概念.

由定理 2.5.2 和定理 2.5.3 立即可以得到下面的命题.

命题 2.6.2 设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是函子并且 $\mathcal{C}$ 是有限完备的, 则下面条件等价:

(1) F 保持有限极限.

(2) F 保持有限积和等值子.

(3) F 保持拉回和终对象.

命题 2.6.3 设 $\mathcal{C}$ 是一个完备范畴, 则 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 保持极限当且仅当 F 保持积和等值子.

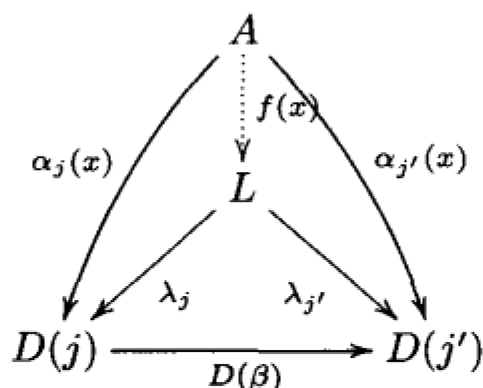
例 2.6.4 考虑遗忘函子 $F:\mathrm{Top}\to\mathrm{Set}$, 由例 2.2.2 和例 2.3.3 及命题 2.6.2 可得 F 保持极限, 同时 F 保持余极限. 类似地我们有遗忘函子 $G:\mathrm{Gp}\to\mathrm{Set}$ 保持极限, 但是由例 2.3.17 知 G 不保持余积从而 G 不保持余极限.

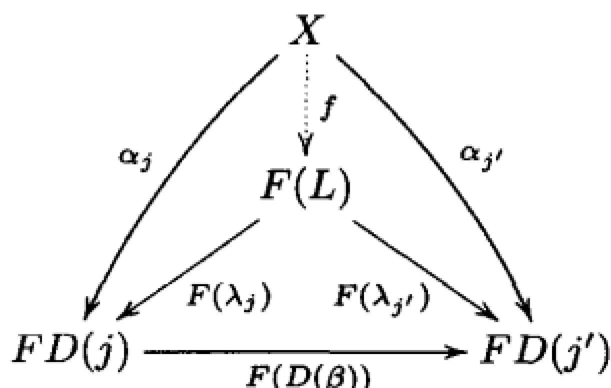
例 2.6.5 考虑从 Hausdorff 拓扑空间范畴 Haus 到拓扑空间范畴 Top 的包含函子 $I:\mathrm{Haus}\to\mathrm{Top}$. 容易看出 I 保持极限, 同时 I 保持余积, 但是 I 不保持余等值子从而不保持余极限 (事实上 Hausdorff 拓扑空间范畴中的余等值子是其在拓扑空间范畴中余等值子的 Hausdorff 化, 这里一个拓扑空间的 Hausdorff 化是指该拓扑空间的 Hausdorff 反射, 我们将在随后的章节中专门进行讨论).

命题 2.6.6 任意一个态射函子保持极限.

证明 设 $F=\mathcal{C}(A,-):\mathcal{C}\to\mathrm{Set}$ 是一个态射函子, $D:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$ 是一个图, $\{\lambda_j:L\to D(j)\}$ 是 D 的极限. 则我们有 $\{F(\lambda_j):F(L)\to FD(j)\}$ 是 FD 上的一个锥形. 设 $\{\alpha_j:X\to FD(j)=\mathcal{C}(A,D(j))\}$ 是 FD 上的一个锥形, 则容易看出对每个

$x \in X$, $\{\alpha_j(x) : A \to D(j)\}$ 是 D 上的一个锥形, 因此对每个 $x \in X$, 存在唯一的态射 $f(x) : A \to L$ 使得 $\alpha_j(x) = \lambda_j f(x)$ 对每个 $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$ 成立. 这样就确定了一个态射 $f : X \to F(L) = \mathcal{C}(A, L)$ 满足 $\alpha_j = F(\lambda_j)f$, 并且这样的 f 是唯一的.





□

若 F 和 G 是两个自然同构的函子, 则容易验证 F 保持 $\mathcal{J}$ 型图的极限当且仅当 G 保持 $\mathcal{J}$ 型图的极限, 因此我们有下面的结果.

推论 2.6.7　任意一个可表达函子保持极限.

定义 2.6.8　设 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个函子:

(1) 如果对任一 $\mathcal{J}$ 型图 $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 以及 D 上的锥形 $\{\lambda_j : L \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 使得 $\{F(\lambda_j) : F(L) \to FD(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 FD 的极限, 则有 $\{\lambda_j : L \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 D 的极限, 我们称 F **反射极限** (reflect limit).

(2) 如果对任一 $\mathcal{J}$ 型图 $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, 若 FD 的极限存在, 则存在 D 上的唯一的一个锥形 $\{\mu_j : T \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 使得 $\{F(\mu_j) : F(T) \to FD(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 FD 的极限并且 $\{\mu_j : T \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 D 的极限, 我们称 F **产生极限** (create limit).

对偶地我们可以定义函子 F 反射余极限和产生余极限的概念.

例 2.6.9　考虑遗忘函子 $F : \mathrm{Gp} \to \mathrm{Set}$. 由群构造容易验证 F 产生极限.

例 2.6.10　遗忘函子 $F : \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ 不反射极限 (只需考虑等值子的情况即可).

由定义可以看出若 F 产生极限则 F 反射极限, 但反之不成立.

例 2.6.11　考虑仿紧拓扑空间范畴到拓扑空间范畴的包含函子 $I : \mathrm{Para} \to \mathrm{Top}$. 容易看出 I 反射极限 (事实上任意一个局部满的包含函子都反射极限), 但 I 不产生极限 (只需考虑积的情况即可).

例 2.6.12　考虑从 Abel 群范畴到群范畴的包含函子 $I : \mathrm{AbGp} \to \mathrm{Gp}$. I 反射余积但是不保持余积 (事实上一族 Abel 群 $\{A_j \mid j \in J\}$ 在 Gp 中的余积 $\sum A_j$ 是 Abel 群当且仅当最多有一个 A_j 是非平凡群).

练习 2.6

1. 对偶于定义 2.6.1 和定义 2.6.8, 试给出函子 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 保持和反射余极限的定义.

2. 设 X 是一个集合, 证明乘积函子 $X \times - : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ 保持余极限.

3. 设 A 是一个集合, 证明态射函子 $\mathrm{Set}(A, -) : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ 反射极限.

4. 证明紧 Hausdorff 拓扑空间范畴 Hcomp 到集合范畴的遗忘函子 $U : \mathrm{Hcomp} \to \mathrm{Set}$ 产生极限.

5. 设 $F : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ 是函子. 证明 F 保持积当且仅当 F 是一个可表达函子.

6. 设范畴 $\mathcal{C}$ 是有限完备和有限余完备的, 试利用 2.2 节习题 1 的结果证明如果函子 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 保持有限极限则 F 保持单态射, 如果 F 保持有限余极限则 F 保持满态射.

第 3 章　函子的伴随性与模结构

我们知道, 两个偏序集 S 与 P 之间的一对保序映射 $f:S\to P$ 与 $g:P\to S$ 是一对 Galois 联络当且仅当对任意的 $s\in S,p\in P$, $p\leqslant f(s)\iff g(p)\leqslant s$ 成立. 如果我们将 S 与 P 看作范畴, f 与 g 看作一对函子, 则我们可以用范畴的语言表达为 $f:S\to P$ 与 $g:P\to S$ 是一对 Galois 联络当且仅当对任意的 $s\in S,p\in P$, 态射集 $P(p,f(s))$ 与态射集 $S(g(p),s)$ 之间存在一个一一到上的映射. 诸如此类的例子在数学研究中广泛存在, 我们可以将其抽象为范畴概念, 称之为一对伴随函子. 函子的伴随性质在许多具体的范畴中大量存在并且被广泛应用, 因此被称为范畴论中最有价值的概念.

3.1　伴随函子的定义

定义 3.1.1　设 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $G:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ 是一对函子. 考虑下面两个双函子:

$$\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{B}\to\mathrm{Set}:(A,B)\mapsto\mathcal{B}(F(A),B),$$
$$\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{B}\to\mathrm{Set}:(A,B)\mapsto\mathcal{A}(A,G(B)).$$

若这两个双函子之间存在一个自然同构, 则称 F 与 G 是一对**伴随函子**(adjoint pair), F 是 G 的 **左伴随** (left adjoint)(G 是 F 的 **右伴随** (right adjoint)), 记作 $(F\dashv G)$.f

上面的定义中的自然同构可以等价地叙述为对任意的 $A\in\mathrm{ob}\mathcal{A},B\in\mathrm{ob}\mathcal{B}$, 存在一个一一到上的映射 $\varphi_{A,B}:\mathcal{B}(F(A),B)\to\mathcal{A}(A,G(B))$ 满足对 $\mathcal{A}$ 中的任意态射 $k:A'\to A$ 和 $\mathcal{B}$ 中的任意态射 $h:B\to B'$, 下面两个图表交换:

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{B}(F(A),B) & \xrightarrow{\varphi_{A,B}} & \mathcal{A}(A,G(B))\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathcal{B}(F(A'),B) & \xrightarrow{\varphi_{A',B}} & \mathcal{A}(A',G(B))\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{B}(F(A),B) & \xrightarrow{\varphi_{A,B}} & \mathcal{A}(A,G(B))\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathcal{B}(F(A),B') & \xrightarrow{\varphi_{A,B'}} & \mathcal{A}(A,G(B'))\end{array}$$

例 3.1.2 设 $F: \mathrm{Set} \to \mathrm{Gp}$ 是自由群函子, $G: \mathrm{Gp} \to \mathrm{Set}$ 是遗忘函子, 则由自由群构造不难验证 F 与 G 是一对伴随函子 $(F \dashv G)$.

例 3.1.3 设 $D: \mathrm{Set} \to \mathrm{Top}$ 是一个函子使得对每个集合 X, $D(X)$ 为以 X 为底集的离散拓扑空间. $U: \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ 是遗忘函子, 则 D 是 U 的左伴随 $(D \dashv U)$. 设 $T: \mathrm{Set} \to \mathrm{Top}$ 是一个函子使得对每个集合 X, $T(X)$ 为以 X 为底集的平庸拓扑空间, 则 T 是 U 的右伴随 $(U \dashv T)$.

例 3.1.4 设 Idem 是一个范畴其对象为所有的序对 (X, e)(这里 X 是一个集合, e 是 X 上的一个幂等算子, 即自映射 $e: X \to X$ 满足 $ee = e$). 一个态射 $f: (X, e) \to (X', e')$ 是指一个映射 $f: X \to X'$ 满足 $fe = e'f$. 考虑函子 $F: \mathrm{Set} \to \mathrm{Idem}$ 使得对每个集合 X, $F(X) = (X, 1_X)$. 函子 $G: \mathrm{Idem} \to \mathrm{Set}$ 使得对任意序对 (X, e), $G(X, e) = \{x \in X \mid x = e(x)\} = \{e(x) \mid x \in X\}$. 则不难验证 F 与 G 是一对伴随函子 $(F \dashv G)$.

例 3.1.5 设 1 是只有一个对象和一个态射的范畴, 则任意范畴 $\mathcal{C}$ 存在唯一的函子 $F: \mathcal{C} \to 1$. 不难验证 F 存在左伴随 (右伴随) 当且仅当 $\mathcal{C}$ 存在初始对象 (终对象).

定理 3.1.6 设 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 是一对函子. F 与 G 是一对伴随函子 $(F \dashv G)$ 当且仅当存在两个自然变换:

$$\eta: 1_{\mathcal{A}} \to GF, \qquad \varepsilon: FG \to 1_{\mathcal{B}}$$

满足条件 $(G\varepsilon)(\eta G) = 1_G$, $(\varepsilon F)(F\eta) = 1_F$, 即下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta G} & GFG \\ & {\scriptstyle 1_G}\searrow & \downarrow{\scriptstyle G\varepsilon} \\ & & G \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\ & {\scriptstyle 1_F}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon F} \\ & & G \end{array}$$

证明 若 F 与 G 是一对伴随 $(F \dashv G)$, 则对任意的 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}, B \in \mathrm{ob}\mathcal{B}$, 存在一个一一到上的映射 $\varphi_{A,B}: \mathcal{B}(F(A), B) \to \mathcal{A}(A, G(B))$. 令 $\eta_A: A \to GF(A)$ 为 $\eta_A = \varphi_{A,F(A)}(1_{F(A)})$, $\varepsilon_B: FG(B) \to B$ 为 $\varepsilon_B = \varphi^{-1}_{G(B),B}(1_{G(B)})$. 首先我们来说明 $\eta: A \mapsto (\eta_A: A \to GF(A))$ 与 $\varepsilon: B \mapsto (\varepsilon_B: FG(B) \to B)$ 都是自然变换.

设 $h: A \to A'$, 欲证下面的方形交换

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & GF(A) \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle GF(h)} \\ A' & \xrightarrow{\eta'_A} & GF(A') \end{array}$$

我们只需考虑下面交换的图表：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F(A),F(A)) & \xrightarrow{\varphi_{A,F(A)}} & \mathcal{A}(A,GF(A)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(F(A),F(A')) & \xrightarrow{\varphi_{A,F(A')}} & \mathcal{A}(A,GF(A')) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F(A),F(A')) & \xrightarrow{\varphi_{A,F(A')}} & \mathcal{A}(A,GF(A')) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{B}(F(A'),F(A')) & \xrightarrow{\varphi_{A',F(A')}} & \mathcal{A}(A',G(A')) \end{array}$$

由第一个方形的交换性有 $GF(h)\eta_A = GF(h)\varphi_{A,F(A)}(1_{F(A)}) = \varphi_{A,F(A')}(F(h))$, 由第二个方形的交换性有 $\varphi_{A,F(A')}(F(h)) = \varphi_{A',F(A')}(1_{F(A')})h = \eta_{A'}h$, 故 $GF(h)\eta_A = \eta_{A'}h$. 因此 $\eta: 1_{\mathcal{A}} \to GF$ 是一个自然变换. 类似地可证 $\varepsilon: FG \to 1_{\mathcal{B}}$ 是一个自然变换.

欲证 $(G\varepsilon)(\eta G) = 1_G$. 对每个 $B \in \text{ob}\mathcal{B}$, 由 $\varepsilon_B: FG(B) \to B$ 出发我们来考虑下面的交换方形即可.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(FG(B),FG(B)) & \xrightarrow{\varphi_{G(B),FG(B)}} & \mathcal{A}(G(B),GFG(B)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(FG(B),B) & \xrightarrow{\varphi_{G(B),B}} & \mathcal{A}(G(B),G(B)) \end{array}$$

类似可证 $(F\eta)(\varepsilon F) = 1_F$.

反之如果存在自然变换 $\eta: 1_{\mathcal{A}} \to GF$ 与 $\varepsilon: FG \to 1_{\mathcal{B}}$ 满足 $(G\varepsilon)(\eta G) = 1_G$, $(\varepsilon F)(F\eta) = 1_F$.

设 $A \in \text{ob}\mathcal{A}, B \in \text{ob}\mathcal{B}$. 令 $\varphi_{A,B}: \mathcal{B}(F(A),B) \to \mathcal{A}(A,G(B))$ 使得对任意的 $g: F(A) \to B, \varphi_{A,B}(g)$ 为复合

$$A \xrightarrow{\eta_A} GF(A) \xrightarrow{G(g)} G(B),$$

同时令 $\theta_{A,B}: \mathcal{A}(A,G(B)) \to \mathcal{B}(F(A),B)$ 使得对任意的 $h: A \to G(B), \theta_{A,B}(h)$ 为复合

$$F(A) \xrightarrow{F(h)} FG(B) \xrightarrow{\varepsilon_B} B.$$

则由 ε 的自然变换性以及等式 $(\varepsilon F)(F\eta) = 1_F$ 我们有

$$\theta_{A,B}\varphi_{A,B}(g) = \varepsilon_B FG(g)F(\eta_A) = g\varepsilon_{F(A)}F(\eta_A) = g1_{F(A)} = g.$$

因此 $\theta_{A,B}\varphi_{A,B} : \mathcal{B}(F(A),B) \to \mathcal{B}(F(A),B)$ 是一个恒同映射. 类似地, 我们有 $\varphi_{A,B}\theta_{A,B} : \mathcal{A}(A,G(B)) \to \mathcal{A}(A,G(B))$ 是一个恒同映射. 因此 $\varphi_{A,B} : \mathcal{B}(F(A),B) \to \mathcal{A}(A,G(B))$ 是一个一一到上的映射. 而由 η 与 ε 的自然变换性容易验证 φ 的自然性. □

我们称定理 3.1.6 中的自然变换 $\eta : 1_{\mathcal{A}} \to GF$ 为该伴随的**单位** (unit), $\varepsilon : FG \to 1_{\mathcal{B}}$ 为该伴随的**余单位** (counit). 由该定理我们可以看出一对函子的伴随性由单位和余单位完全确定, 因此我们经常将伴随 $(F \dashv G)$ 表示为 $(F,G,\eta,\varepsilon) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

定理 3.1.7 设 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 是一对函子, 则下面命题等价:

(1) $(F \dashv G)$.

(2) 存在一个自然变换 $\eta : 1_{\mathcal{A}} \to GF$ 使得对任意 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, $\eta_A : A \to GF(A)$ 满足 G 对 A 的万有性质:

对任意的 $f : A \to G(B)$, 存在唯一的 $g : F(A) \to B$ 使得 $f = G(g)\eta_A$, 即下面图表交换:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & GF(A) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle G(g)} & \\ G(B) & & \end{array}$$

(3) 存在一个自然变换 $\varepsilon : FG \to 1_{\mathcal{B}}$ 使得对任意 $B \in \mathrm{ob}\mathcal{B}$, $\varepsilon_B : FG(B) \to B$ 满足 F 对 B 的万有性质:

对任意的 $h : F(A) \to B$, 存在唯一的 $t : A \to G(B)$ 使得 $h = \varepsilon_B F(t)$, 即下面图表交换:

$$\begin{array}{ccc} FG(B) & \xrightarrow{\varepsilon_B} & B \\ & {\scriptstyle F(t)} \nwarrow & \uparrow {\scriptstyle h} \\ & & F(A) \end{array}$$

证明 (1)⇒(2) 由定理 3.1.6, 伴随 $(F \dashv G)$ 确定一个单位 $\eta : 1_{\mathcal{A}} \to GF$, 对任意 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 我们来验证 $\eta_A : A \to GF(A)$ 满足 G 对 A 的万有性质.

设 $f : A \to G(B)$, 由伴随 $(F \dashv G)$ 存在一一到上的映射 $\varphi_{A,B} : \mathcal{B}(F(A),B) \to \mathcal{A}(A,G(B))$. 令 $g : F(A) \to B$ 为 $g = \varphi_{A,B}^{-1}(f)$, 考虑下面的交换方形:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F(A),F(A)) & \xrightarrow{\varphi_{A,F(A)}} & \mathcal{A}(A,GF(A)) \\ \downarrow {\scriptstyle g} & & \downarrow {\scriptstyle G(g)} \\ \mathcal{B}(F(A),B) & \xrightarrow{\varphi_{A,B}} & \mathcal{A}(A,G(B)) \end{array}$$

我们有 $G(g)\eta_A = \varphi_{A,B}(g)$, 即 $f = G(g)\eta_A$, 并且这样的 g 是唯一的.

(2)⇒ (1) 对任意的 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}, B \in \mathrm{ob}\mathcal{B}$, 令

$$\varphi_{A,B} : \mathcal{B}(F(A), B) \to \mathcal{A}(A, G(B)), \qquad g \mapsto G(g)\eta_A$$

由题设可知 $\varphi_{A,B}$ 是一一到上的.

另外对任意的 $f : A' \to A$, 考虑到 η 是自然变换容易验证下面方形交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F(A), B) & \xrightarrow{\varphi_{A,B}} & \mathcal{A}(A, G(B)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(F(A'), B) & \xrightarrow{\varphi_{A',B}} & \mathcal{A}(A', G(B)) \end{array}$$

同时对任意的 $h : B \to B'$, 由于 G 是函子, 下面的方形交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F(A), B) & \xrightarrow{\varphi_{A,B}} & \mathcal{A}(A, G(B)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(F(A), B') & \xrightarrow{\varphi_{A,B'}} & \mathcal{A}(A, G(B')) \end{array}$$

类似地我们可以证明 (1)⇔(3). □

例 3.1.8 设 $P : \mathrm{Top}_0 \to \mathrm{Poset}$ 是例 1.2.12 中定义的函子. 对任意一个偏序集 L, L 上的 Alexandroff 拓扑是指由 L 中的所有上集形成的拓扑 ($U \subseteq L$ 是一个上集当且仅当 $x \in U, x \leqslant y \Rightarrow y \in U$). 记 $A(L)$ 为 L 赋予 Alexandroff 拓扑的拓扑空间, 则不难验证 $A(L)$ 是一个 T_0 拓扑空间. 若 $f : L \to M$ 是偏序集之间的保序映射, 则 $f : A(L) \to A(M)$ 是一个连续映射. 这样我们就定义了一个函子 $A : \mathrm{Poset} \to \mathrm{Top}_0$. 设 X 是一个 T_0 拓扑空间, 则恒同映射 $\eta_X : A(P(X)) \to X$ 是一个连续映射, 因此 $\eta : AP \to 1_{\mathrm{Top}_0}$ 是一个自然变换. 对任意的偏序集 L 及连续映射 $g : A(L) \to X$, $g : L \to P(X)$ 是一个保序映射, 因此由定理 3.1.7 可得函子 A 是 P 的左伴随 ($A \dashv P$). 如果 T_0 拓扑空间 X 中的任意一个点都存在最小的开邻域 (等价地 X 的任意多个开集的交仍然是开集), 则称 X 是一个 Alexandroff 拓扑空间. 容易验证 T_0 拓扑空间 X 是一个 Alexandroff 拓扑空间当且仅当 X 上的拓扑恰好等同于偏序集 $P(X)$ 上的 Alexandroff 拓扑. 进一步我们考虑由 Alexandroff 拓扑空间构成的 T_0 拓扑空间范畴 Top_0 的满子范畴 ATop, 则我们可以看出函子 P 在 Alexandroff 拓扑空间范畴上的限制 $P : \mathrm{ATop} \to \mathrm{Poset}$ 是一个同构, 因此 Alexandroff 拓扑空间范畴 ATop 同构于偏序集范畴 Poset.

推论 3.1.9 若 $F, F' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 都是 $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 的左伴随, 则 F 与 F' 是自然同构的.

证明 若 $(F \dashv G)$ 与 $(F' \dashv G)$ 同时成立, 由定理 3.1.7, 存在自然变换 $\eta : 1_{\mathcal{A}} \to GF$ 和 $\eta' : 1_{\mathcal{A}} \to GF'$ 使得对任意 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, $\eta_A : A \to GF(A)$ 和 $\eta'_A : A \to GF'(A)$ 都

满足 G 对 A 的万有性质. 因此可得对任意的 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 存在 $r_A : F(A) \to F'(A), s_A : F'(A) \to F(A)$ 使得 $G(r_A)\eta_A = \eta'_A, G(s_A)\eta'_A = \eta_A$,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & GF(A) \\ {\scriptstyle \eta'_A}\downarrow & \overset{G(r_A)}{\swarrow}\ \overset{G(s_A)}{\nearrow} & \\ GF'(A) & & \end{array}$$

故 $G(s_A r_A)\eta_A = G(s_A)G(r_A)\eta_A = G(s_A)\eta_{A'} = \eta_A = G(1_{F(A)})\eta_A$, 由 G 对 A 的万有性质可知 $s_A r_A = 1_{F(A)}$. 同理有 $r_A s_A = 1_{F'(A)}$, 因此 $r_A : F(A) \to F'(A)$ 是一个同构. 类似地可以证明 r 的自然性, 即 $r : F \to F'$ 是一个自然同构. □

上面的结果表明一个函子的左伴随在同构的意义下是由该函子唯一确定的, 对偶地, 我们也可以得到任意一个函子的右伴随在同构的意义下是由其唯一确定的.

练习 3.1

1. 试写出例 3.1.2～例 3.1.5 的详细证明.

2. 设函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 都存在左伴随, 证明复合函子 $GF : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ 存在左伴随.

3. 设 X 和 Y 是集合, $f : X \to Y$ 是映射. 如果将幂集格 $P(X)$ 和 $P(Y)$(关于包含序) 看作范畴, 则 f 诱导出两个函子

$$f^{\rightarrow} : P(X) \to P(Y), \qquad f^{\rightarrow}(A) = f(A), \qquad A \in P(X),$$
$$f^{\leftarrow} : P(Y) \to P(X), \qquad f^{\leftarrow}(B) = f^{-1}(B), \quad B \in P(Y).$$

证明 $f^{\rightarrow}$ 与 $f^{\leftarrow}$ 是一对伴随函子 $f^{\rightarrow} \dashv f^{\leftarrow}$.

4. 证明函子 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 存在左伴随当且仅当对任意的 $C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, 复合函子 $\mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}(C,-)} \mathrm{Set}$ 是一个可表达函子.

5. (1) 设 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是一对等价函子, 证明 F 是 G 的左伴随同时是右伴随 $F \dashv G$, $G \dashv F$.

(2) 若 $F : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ 和 $G : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ 满足 F 是 G 的左伴随同时是右伴随 $F \dashv G, G \dashv F$, 则 F 与 G 是一对等价函子.

6. 设 $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 证明下面条件等价:

(1) 对任意的 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, $F\eta_A : F(A) \to FGF(A)$ 是一个同构.

(2) 对任意的 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, $\varepsilon_{F(A)} : FGF(A) \to F(A)$ 是一个同构.

(3) 对任意的 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, $G\varepsilon_{F(A)} : GFGF(A) \to GF(A)$ 是一个同构.

(4) 对任意的 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, $GF\eta_A = \eta_{GF(A)}$.

(5) 对任意的 $B \in \mathrm{ob}\mathcal{B}$, $GF\eta_{G(B)} = \eta_{GFG(B)}$.

3.2 伴随函子定理

引理 3.2.1　设 $(F \dashv G): \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. 则 G 保持极限并且 F 保持余极限.

证明　设 $\{\lambda_j : B \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 $\mathcal{J}$ 型图 $D: \mathcal{J} \to \mathcal{B}$ 的极限, 则容易看出 $\{G(\lambda_j) : G(B) \to GD(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 GD 上的一个锥形. 若 $\{\alpha_j : A \to GD(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 GD 上的一个锥形, 由定理 3.1.7, 存在态射 $\eta_A : A \to GF(A)$ 满足 G 对 A 的万有性质. 因此对每个 $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$, 存在唯一的态射 $f_j : F(A) \to D(j)$ 使得 $\alpha_j = G(f_j)\eta_A$. 容易验证 $\{f_j : F(A) \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 D 上的一个锥形,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & GF(A) \\ {\scriptstyle \alpha_j}\downarrow & \overset{G(f_j)}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle G(f_{j'})} \\ GD(j) & \longrightarrow & GD(j') \end{array}$$

因此存在态射 $f : F(A) \to B$ 使得 $f_j = \lambda_j f$. 则复合态射 $h = G(f)\eta_A : A \to G(B)$ 满足 $\alpha_j = G(\lambda_j)h$.

另外若 $g : A \to G(B)$ 也满足 $\alpha_j = G(\lambda_j)g$, 则存在 $g' : F(A) \to B$ 使得 $g = G(g')\eta_A$. 这时 $G(\lambda_j f)\eta_A = \alpha_j = G(\lambda_j)G(g')\eta_A = G(\lambda_j g')\eta_A$, 由唯一性可知 $\lambda_j f = \lambda_j g'$, 进一步由命题 2.1.9 可得 $f = g'$, 故 $h = g$.

类似地可以证明 F 保持余极限.　□

设 $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 是函子, A 是 $\mathcal{A}$ 中的一个对象. 考虑所有的序对 (B, f)(这里 $B \in \mathrm{ob}\mathcal{B}$, $f : A \to G(B)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个态射), (B, f) 到 (B', f') 的一个态射是指 B 到 B' 的一个态射 $g : B \to B'$ 满足 $f' = G(g)f$, 即下面图表交换:

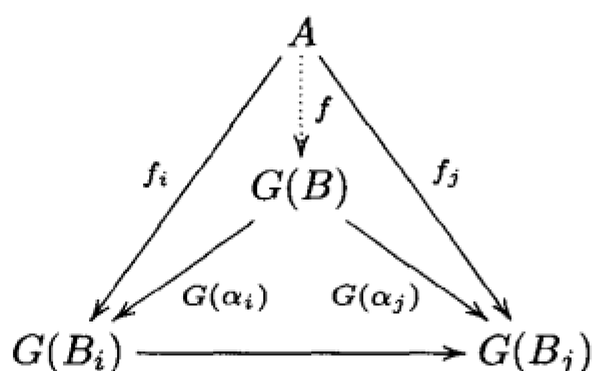
$$\begin{array}{ccc} & A & \\ {\scriptstyle f}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle f'} \\ G(B) & \xrightarrow{G(g)} & G(B') \end{array}$$

则容易看出这样定义了一个范畴, 我们将该范畴记作 $(A \downarrow G)$.

范畴 $(A \downarrow G)$ 到范畴 $\mathcal{B}$ 存在一个遗忘函子 $U : (A \downarrow G) \to \mathcal{B}$ 使得任意的 $g : (B, f) \to (B', f')$ 对应为 $g : B \to B'$.

引理 3.2.2　设范畴 $\mathcal{B}$ 存在 $\mathcal{J}$ 型图极限并且函子 $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 保持 $\mathcal{J}$ 型图极限, 则对任意的 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 范畴 $(A \downarrow G)$ 存在 $\mathcal{J}$ 型图极限并且遗忘函子 $U : (A \downarrow G) \to \mathcal{B}$ 产生 $\mathcal{J}$ 型图极限.

证明 设 $D:\mathcal{J}\to(A\downarrow G)$ 是一个 $\mathcal{J}$ 型图, 记它的第 j 个顶点为 (B_j,f_j), 则 UD 是范畴 $\mathcal{B}$ 中的一个 $\mathcal{J}$ 型图, 设其极限为 $\{\alpha_j:B\to B_j\mid j\in\mathrm{ob}\mathcal{J}\}$. 由题设知 $\{G(\alpha_j):G(B)\to G(B_j)\mid j\in\mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 GUD 的极限, 但是明显地 $\{f_j:A\to G(B_j)\mid j\in\mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 GUD 上的一个锥形, 因此存在的唯一态射 $f:A\to G(B)$ 使得对任意的 $j\in\mathrm{ob}\mathcal{J}$ 有 $f_j=G(\alpha_j)f$ 成立. 不难验证 $\{\alpha_j:(B,f)\to(B_j,f_j)\mid j\in\mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 D 的极限,



遗忘函子 $U:(A\downarrow G)\to\mathcal{D}$ 产生 $\mathcal{J}$ 型图极限容易看出. □

引理 3.2.3 设 $G:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ 是函子. G 存在左伴随当且仅当对任意的 $A\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$, 范畴 $(A\downarrow G)$ 存在初始对象.

证明 若 $(F\dashv G)$, $\eta:1_{\mathcal{A}}\to GF$ 是该伴随的单位, 则由定理 3.1.7 可知对任意的 $A\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$, $\eta_A:A\to GF(A)$ 满足 G 对 A 的万有性质, 从而 $(F(A),\eta_A)$ 是 $(A\downarrow G)$ 中的起点对象.

反之, 对任意的 $A\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$, 设 $(F(A),\eta_A)$ 是 $(A\downarrow G)$ 中的初始对象. 若 $f:A\to A'$ 是 $\mathcal{A}$ 中的态射, 则存在唯一的态射 $F(f):F(A)\to F(A')$ 使得下面图表交换:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F(A)) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle GF(f)} \\ A' & \xrightarrow{\eta_{A'}} & G(F(A')) \end{array}$$

这样我们就定义了一个函子 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 使得 $\eta:1_{\mathcal{A}}\to GF$ 成为一个自然变换, 并且对任意 $A\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$, $\eta_A:A\to GF(A)$ 满足 G 对 A 的万有性质, 因此由定理 3.1.7 $(F\dashv G)$. □

定理 3.2.4(广义伴随函子定理) 设范畴 $\mathcal{B}$ 是完备的, $G:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ 是一个函子. 则 G 存在左伴随当且仅当下面条件成立:

(1) G 保持极限.

(2) 解答集条件 (solution set condition): 对每个 $A\in\mathrm{ob}\mathcal{A}$, 存在一个集合 $\{(B_i,f_i)\mid i\in I\}\subseteq\mathrm{ob}(A\downarrow G)$ 满足对任意的 $g:A\to G(C)$, 存在 $i\in I$ 和 $\mathcal{B}$

中的态射 $h: B_i \to C$ 使得 $g = G(h)f_i$.

证明　若 $(F \dashv G)$, 则由引理 3.2.1, G 保持极限并且对每个 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, $\{(F(A), \eta_A)\}$ 满足条件 (2)(这里 η 是该伴随的单位).

反之设 G 满足条件 (1) 和 (2). 由引理 3.2.3, 我们只需证明对任意的 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, $(A \downarrow G)$ 中存在初始对象, 但是由引理 3.2.2 范畴 $(A \downarrow G)$ 是完备的, 因此我们只需证明如果一个完备范畴 $\mathcal{C}$ 存在一个对象集 $\{C_i \mid i \in I\}$ 使得任意的 $C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, 存在 $i \in I$ 和态射 $f: C_i \to C$, 则 $\mathcal{C}$ 中存在初始对象.

设 $\mathcal{C}$ 是满足上述条件的范畴, 令 $P = \prod C_i$ 是 $\{C_i \mid i \in I\}$ 的积. 考虑所有从 P 到 P 的态射全体看作一个图表. 若其极限为 $Q \xrightarrow{m} P$, 我们来证明 Q 是 $\mathcal{C}$ 中的初始对象.

首先对任意的 $C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, 存在 $i \in I$ 和态射 $Q \xrightarrow{m} P \xrightarrow{\pi_i} C_i \to C$. 若 $f, g: Q \to C$, 设 $e: E \to Q$ 是 $f, g: Q \to C$ 的等值子. 存在一个态射 $r: P \to E = P \to C_j \to E$, 由于 $m: Q \to P$ 是 P 到 P 的所有态射构成的图表的极限, 故有 $(mer)m = 1_P m$, 即 $m(erm) = m1_Q$, 由命题 2.1.9 可得 $erm = 1_Q$. 但是 e 是单态射, 从而由命题 1.4.4 可知 e 是一个同构, 因此由命题 2.2.3 得 $f = g$.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & Q & \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} & C \\ & \nwarrow^{r} & \downarrow m & & \\ & & P & & \end{array}$$

□

例 3.2.5　群范畴到集合范畴的遗忘函子 $U: \mathrm{Gp} \to \mathrm{Set}$ 存在左伴随. 事实上由群范畴的积和等值子的构造知, U 保持积和等值子从而保持极限, 并且群范畴是完备的, 因此要证明 U 存在左伴随只要说明 U 满足解答集条件.

设 A 是一个集合, 注意到对任意一个群 G 及任意的映射 $f: A \to U(G)$ 都可以分解为 $A \to U(G') \to U(G)$, 这里 G' 表示由像集 $f(A)$ 生成的 G 的子群. 而 G' 中的元素可以表示为 $f(A)$ 中的元素与其逆元素的有限积, 因此有 $\mathrm{card}(G') \leqslant \aleph_0 \mathrm{card}(A)$. 这样我们可以取解答集为 $\{(G, f) \mid f: A \to U(G), G \subseteq \mathbb{N} \times A\}$.

定理 3.2.6(特殊伴随函子定理)　设 $\mathcal{B}$ 是一个完备的、良幂的范畴并且存在一个余分离集. 则函子 $G: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 存在左伴随当且仅当 G 保持极限.

证明　只需证明充分性.

类似于定理 3.2.4 的证明, 设 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 考虑范畴 $(A \downarrow G)$. 由引理 3.2.2 得 $(A \downarrow G)$ 是完备的并且 $(A \downarrow G)$ 中的任意态射 $h: (B, f) \to (B', g)$ 是单态射当且仅当 $h: B \to B'$ 是 $\mathcal{B}$ 中的单态射, 因此 $(A \downarrow G)$ 仍然是良幂的. 另外若 $\{B_i \mid i \in I\}$ 是 $\mathcal{B}$ 中的余分离集, 则明显的有 $\{(B_i, f) \mid f \in \mathcal{A}(A, G(B_i)), i \in I\}$ 是 $(A \downarrow G)$ 中的

一个余分离集. 因此我们只需证明如果一个完备且良幂的范畴 $\mathcal{C}$ 中存在一个余分离集, 则 $\mathcal{C}$ 中存在初始对象即可.

设 $\{C_i \mid i \in I\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个余分离集, 记 $P = \prod_{i\in I} C_i$ 为 $\{C_i \mid i \in I\}$ 的积, 记 Q 为 P 的所有子对象的交. 我们来说明 Q 是 $\mathcal{C}$ 中的初始对象.

首先若 $\mathcal{C}$ 中存在不同态射 $r, s : Q \to B$, 则其等值子仍然是 P 的一个子对象并且在子对象偏序集中小于 Q, 这与 Q 是最小元矛盾. 因此 Q 到 $\mathcal{C}$ 中的任意对象至多存在一个态射.

其次对任意的 $C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, 令 $I' \subseteq I$ 为满足存在态射 $C \to C_j$ 的 j 的全体的集合, $\prod_{j\in I'} C_j$ 为 $\{C_j \mid j \in I'\}$ 的积, 则存在一个态射 $f : C \to \prod_{j\in I'} C_j$. 由于 $\{C_i \mid i \in I\}$ 是余分离集, 容易看出 f 是单态射. 考虑下面的拉回方形:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\bar{f}} & \prod_{i\in I} C_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{f} & \prod_{j\in I'} C_j \end{array}$$

由命题 2.4.5 可知 $\bar{f}$ 是单态射, 故 B 是 P 的一个子对象. 因为 Q 是 P 的所有子对象的交, 因此存在一个态射 $Q \to B$, 这时我们有复合态射 $Q \to B \to C$. □

例 3.2.7 考虑紧 Hausdorff 拓扑空间范畴 Hcomp 到 Tychonoff 拓扑空间范畴的遗忘函子 $U : \mathrm{Hcomp} \to \mathrm{Tych}$. 由于紧 Hausdorff 拓扑空间的积仍然是紧 Hausdorff 空间并且若 X 是紧 Hausdorff 空间, $f, g : X \to Y$ 是连续映射, 则 f, g 的等值子是 X 的闭子空间从而是紧 Hausdorff 的, 因此范畴 Hcomp 是完备的并且 U 保持极限. 另外对任意的紧 Hausdorff 拓扑空间 X, X 的一个子对象对应于 X 的一个闭子空间, 从而 Hcomp 是良幂的, 并且单位闭区间 $I = [0.1]$ 是 Hcomp 中的一个余分离子. 因此由特殊伴随函子定理, U 存在左伴随.

练习 3.2

1. 证明从紧 Hausdorff 拓扑空间范畴 Hcomp 到集合范畴的遗忘函子 $U : \mathrm{Hcomp} \to \mathrm{Set}$ 存在左伴随.

2. 证明环范畴 Rng 到 Abel 群范畴 AbGp 的遗忘函子 $F : \mathrm{Rng} \to \mathrm{AbGp}$ 存在左伴随.

3. 设 $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. 证明 F 保持余极限.

3.3 反射子范畴和余反射子范畴

定义 3.3.1 设范畴 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的满子范畴. 如果包含函子 $I : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 存在左伴随, 我们称 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的 **反射子范畴** (reflective subcategory). 若 $(F, I, \eta, \varepsilon) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$,

则称函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为 **反射函子** (reflective functor), 对任意的 $C\in\mathrm{ob}\mathcal{C}$, 称态射 $\eta_C: C\to IF(C)$ 为对象 C 的 $\mathcal{D}$ **反射** ($\mathcal{D}$-reflection for C).

对偶地如果包含函子 $I:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 存在右伴随, 我们称 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的 **余反射子范畴** (coreflective subcategory). 若 $(I,G,\eta,\varepsilon):\mathcal{D}\to\mathcal{C}$, 则称函子 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为 **余反射函子** (coreflective functor), 对任意的 $C\in\mathrm{ob}\mathcal{C}$, 称态射 $\varepsilon_C: IG(C)\to C$ 为对象 C 的 $\mathcal{D}$ **余反射** ($\mathcal{D}$-coreflection for C).

例 3.3.2　Abel 群范畴 AbGp 是群范畴 Gp 的反射子范畴. 事实上这时包含函子的左伴随把每个群 G 对应为 G 的 Abel 化 G/G', 即 G 的最大 Abel 商群.

例 3.3.3　紧 Hausdorff 拓扑空间范畴 Hcomp 是 Tychonoff 拓扑空间范畴 Tych 的反射子范畴. 这时包含函子的左伴随将每个 Tychonoff 拓扑空间对应为它的 Stone-Čech 紧化.

例 3.3.4　由扭群 (torsion group) 和群同态构成的范畴 Tors 是 Abel 群范畴 AbGp 的余反射子范畴. 对每个 Abel 群 G, 记 $T(G)$ 为 G 的子扭群即由 G 中的有限序元素构成的子群, 则 T 是一个函子并且 T 是包含函子 Tors $\to$ AbGp 的右伴随.

例 3.3.5　考虑由序对 (X,ρ) 构成的范畴 $\mathcal{C}$, 这里 X 是一个集合而 $\rho\subseteq X\times X$ 是集合 X 上的一个二元关系, 一个态射 $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ 是指一个映射 $X\to Y$ 使得 $(x,x')\in\rho\Longrightarrow(f(x),f(x'))\in\sigma$. 设 $\mathcal{D}$ 是由对象 (X,ρ) 使得 ρ 是集合 X 上的一个对称关系, 即 $\rho^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in\rho\}\subseteq\rho$ 构成的范畴 $\mathcal{C}$ 的满子范畴, 则范畴 $\mathcal{D}$ 既是范畴 $\mathcal{C}$ 的反射子范畴同时也是 $\mathcal{C}$ 的余反射子范畴. 事实上反射函子将 $\mathcal{C}$ 中的任意一个对象 (X,ρ) 对应为 $(X,\rho\cup\rho^{-1})$, 余反射函子将 $\mathcal{C}$ 中的任意一个对象 (X,ρ) 对应为 $(X,\rho\cap\rho^{-1})$.

命题 3.3.6　设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的满子范畴. 下面条件等价:

(1) $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反射子范畴.

(2) 对任意的 $C\in\mathrm{ob}\mathcal{C}$, 存在 $D\in\mathrm{ob}\mathcal{D}$ 和态射 $r:C\to D$ 满足下面的万有性质:

对任意的 $D'\in\mathrm{ob}\mathcal{D}$ 和态射 $f:C\to D'$, 存在唯一的态射 $f':D\to D'$ 使得下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\ r\ } & D \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & \swarrow{\scriptstyle f'} & \\ D' & & \end{array}$$

证明　(1)⇒(2) 由定理 3.1.7 容易看出.

(2)⇒(1) 对任意的 $C\in\mathrm{ob}\mathcal{C}$, 记满足题设条件的 D 为 $F(C)$, r 为 η_C. 则由题设条件容易验证 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个函子, 并且 $\eta:1_{\mathcal{C}}\to IF$ 是自然变换 (这里

$I: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是包含函子),

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\eta_C} & F(C) \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(g)} \\ C' & \xrightarrow{\eta_{C'}} & F(C') \end{array}$$

故由定理 3.1.7 可知 F 是 I 的左伴随. □

设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个满子范畴, $C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$. 类似于余切片范畴我们可以形成一个新的范畴如下:

其对象为所有的序对 (f, D), 其中 $f: C \to D$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射并且 $D \in \mathrm{ob}\mathcal{D}$. 态射 $h: (f, D) \to (f', D')$ 是指 $\mathcal{D}$ 中的一个态射 $D \to D'$ 使得 $f' = hf$.

则由命题 3.3.6 不难看出 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反射子范畴当且仅当 $\mathcal{C}$ 中的任意一个对象 C, 上面的范畴存在初始对象.

对偶地我们有下面命题.

命题 3.3.7 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的满子范畴. 下面条件等价:

(1) $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的余反射子范畴.

(2) 对任意的 $C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, 存在 $D \in \mathrm{ob}\mathcal{D}$ 和态射 $c: D \to C$ 满足下面的万有性质:

对任意的 $D' \in \mathrm{ob}\mathcal{D}$ 和态射 $g: D' \to C$, 存在唯一的态射 $g': D' \to D$ 使得下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} & & D' \\ & {\scriptstyle g'}\swarrow & \downarrow{\scriptstyle g} \\ D & \xrightarrow{c} & C \end{array}$$

定义 3.3.8 若 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反射子范畴. 如果对任意的 $C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, C 的 $\mathcal{D}$ 反射 $\eta_C: C \to IG(C)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个满态射, 则称 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的 **满反射子范畴** (epireflective subcategory).

类似地, 如果每个反射都是单态射、双态射或正则满态射时, 我们可以定义 **单反射子范畴** (monoreflective subcategory)、**双反射子范畴** (bireflective subcategory)、**正则满反射子范畴** (regular epireflective subcategory) 等概念.

例 3.3.9 由于一个群的 Abel 群反射是该群的最大 Abel 商群, 因此 Abel 群范畴 AbGp 是群范畴 Gp 的正则满反射子范畴.

例 3.3.10 T_0 拓扑空间范畴 Top_0 是拓扑空间范畴 Top 的正则满反射子范畴. 对任意一个拓扑空间 X, 定义 X 上的等价关系: $x \sim y \iff \{x\}^- = \{y\}^-$, 这

里 $\{x\}^-$ 表示单点集 $\{x\}$ 的闭包, 则商拓扑空间 $X/\sim$ 是一个 T_0 空间, 并且商映射 $q_X: X \to X/\sim$ 是拓扑空间 X 的 T_0 反射.

例 3.3.11　Tychonoff 拓扑空间范畴 Tych 是 T_0 拓扑空间范畴 Top_0 的双反射子范畴. 事实上对任意一个 T_0 拓扑空间 X, 考虑由 X 的补零集为基生成的拓扑 τ_0 ($U \subseteq X$ 称为 X 上的一个补零集是指存在一个连续实值函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 使得 $U = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, 容易验证有限多个补零集的交是补零集, 可数多个补零集的并是补零集). 则拓扑空间 (X, τ_0) 是一个 Tychonoff 拓扑空间, 进一步有恒同映射 $X \to (X, \tau_0)$ 是 T_0 拓扑空间 X 的 Tychonoff 反射.

例 3.3.12　紧 Hausdorff 拓扑空间范畴 Hcomp 是 Hausdorff 拓扑空间范畴 Hau 的满反射子范畴, 事实上反射函子是 Tychonoff 反射函子与 Stone-Čech 紧化函子的复合.

例 3.3.13　紧 Hausdorff 拓扑空间范畴 Hcomp 是拓扑空间范畴 Top 的反射子范畴但不是满反射子范畴, 反射函子是 T_0 反射函子与 Tychonoff 反射函子以及 Stone-Čech 紧化函子的复合.

如果范畴 $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{D}$ 满足对任意的 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, 若 A 同构于 $\mathcal{D}$ 中的某个对象, 则 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{D}$, 则称 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的 **同构闭子范畴** (isomorphism-closed subcategory).

命题 3.3.14　设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的同构闭满子范畴并且 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反射子范畴, 则 $\mathcal{D}$ 对 $\mathcal{C}$ 中的极限封闭.

证明　设包含 $I: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 的左伴随为 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $D: \mathcal{J} \to \mathcal{D}$ 是范畴 $\mathcal{D}$ 中的一个 $\mathcal{J}$ 型图, $\{p_j: A \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 ID 在范畴 $\mathcal{C}$ 中的极限, 我们只需说明 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{D}$ 即可.

设 A 的 $\mathcal{D}$ 反射为 $r: A \to A'$, 则对任意的 $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$, 存在唯一的态射 $f_j: A' \to D_j$ 使得 $p_j = f_j r$. 由反射的万有性质不难看出 $\{f_j: A' \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是一个锥形, 因此由极限的万有性质存在唯一的态射 $s: A' \to A$ 使得 $f_j = p_j s$ 对每个 $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$ 成立.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r} & A' \\ {\scriptstyle p_j}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle f_j} & \downarrow{\scriptstyle f_{j'}} \\ D(j) & \longrightarrow & D(j') \end{array} \qquad (s: A' \dashrightarrow A)$$

这时 $p_j sr = f_j r = p_j = p_j 1_A$, 由命题 2.1.9 可得 $sr = 1_A$. 另外由反射的万有性质和等式 $(rs)r = r = (1_{A'})r$ 可得 $rs = 1_{A'}$, 因此 r 是同构, $A \in \mathrm{ob}\mathcal{D}$. □

一般地要确定一个范畴的满子范畴是否是反射子范畴并非是一件容易的事情. 由特殊伴随函子定理与定理 2.5.3, 我们可以给出下面一个比较容易的判别准则.

命题 3.3.15 若范畴 $\mathcal{C}$ 的满子范畴 $\mathcal{D}$ 是一个完备的良幂的范畴, 并且 $\mathcal{D}$ 中存在一个余分离集, 则 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反射子范畴当且仅当 $\mathcal{D}$ 对积和等值子封闭.

练习 3.3

1. 设范畴 Pre 表示所有的预序集合为对象 (集合 X 称为一个预序集是指 X 上定义了一个自反的、传递的二元关系), 保序映射为态射形成的范畴. 证明偏序集合范畴 Poset 是范畴 Pre 的满反射子范畴, 并且写出反射的具体构造.

2. 证明 T_0 拓扑空间范畴 Top_0 是拓扑空间范畴的满反射子范畴, 并且写出反射的具体构造.

3. 证明无扭 Abel 群 (torsion-free Abelian group) 范畴是 Abel 群范畴的反射子范畴.

4. 设 $\mathbb{N}$ 是自然数集合看作一个范畴 (按照通常的序关系), $M \subseteq \mathbb{N}$ 看作 $\mathbb{N}$ 的子范畴. 证明

(1) M 是 $\mathbb{N}$ 的反射子范畴当且仅当 M 是一个无限集.

(2) M 是 $\mathbb{N}$ 的余反射子范畴当且仅当 $0 \in M$.

3.4 Cartesian 闭范畴

我们知道在实数系中有三种基本的运算, 即乘法运算、加法运算和幂运算. 我们已经成功地在范畴上定义了乘法运算和加法运算, 即积和余积, 在本节中我们来讨论幂运算在范畴上的推广.

设范畴 $\mathcal{C}$ 存在有限积, $A \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$. 则我们可以定义一个积函子

$$(A \times -) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

使得任意的态射 $f : B \to B'$,

$$(A \times -)(f) = 1_A \times f : A \times B \to A \times B'.$$

定义 3.4.1 设范畴 $\mathcal{C}$ 存在有限积, 如果对任意的 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, 积函子 $(A \times -) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 存在右伴随, 则称 $\mathcal{C}$ 是一个Cartesian 闭范畴.

我们记积函子 $(A \times -)$ 的右伴随在对象上的作用为 $B \mapsto B^A$, 伴随的余单位关于对象 B 的态射为 $e : A \times B^A \to B$. 由定理 3.1.7 我们可以知道具有有限积的范畴 $\mathcal{C}$ 是 Cartesian 闭的当且仅当对 $\mathcal{C}$ 中的任意一对对象 (A, B), 存在一个对象 B^A 和一个态射 $e : A \times B^A \to B$ 满足对任意一个态射 $f : A \times C \to B$, 存在唯一的态射 $\hat{f} : C \to B^A$ 使得下面图表交换:

$$\begin{array}{ccc} A\times B^A & \xrightarrow{e} & B \\ & \nwarrow^{1_A\times \hat{f}} & \uparrow f \\ & & A\times C \end{array}$$

我们称 B^A 是 **幂对象** (power object), 态射 $e: A\times B^A \to B$ 是 **计值态射** (evaluation morphism).

例 3.4.2　集合范畴 Set 是 Cartesian闭范畴. 事实上这时的幂对象 B^A 就是 A 到 B 全体映射构成的集合, 而计值态射 $e: A\times B^A \to B$ 就是通常的计值映射.

例 3.4.3　以偏序集为对象, 保序映射为态射构成的范畴 Poset 是 Cartesian 闭范畴. 这时的幂对象 B^A 就是 A 到 B 的全体保序映射赋予逐点序构成的偏序集, 而计值态射就是通常的计值映射.

例 3.4.4　设 L 是一个偏序集看作一个范畴, 则容易看出 L 是一个 Cartesian 闭范畴当且仅当 L 中的任意两个元素 $a,b\in L$, 集合 $\{x\mid a\wedge x\leqslant b\}$ 存在最大元. 因此可以得到如果 L 是完备格, 则 L 是 Cartesian 闭范畴当且仅当 L 是一个 Heyting 代数当且仅当 L 是一个 frame.

例 3.4.5　考虑以所有的完备格为对象, 以保持定向上确界的映射 (也称为 Scott 连续映射) 为态射形成的范畴 UPS. 对任意两个完备格 L 与 M, 记 M^L 为 L 到 M 的所有保持定向上确界的映射的全体构成的集合, 则 M^L 在逐点序关系下是一个完备格, 并且通常的计值映射 $e: L\times M^L \to M$ 仍然保持定向上确界. 因此范畴 UPS 是一个 Cartesian 闭范畴.

例 3.4.6　拓扑空间范畴 Top 不是 Cartesian 闭范畴. 事实上积函子 $(X\times -)$ 不保持余等值子从而不保持余极限, 由引理 3.2.1 可知 $(X\times -)$ 不存在右伴随. 但是拓扑空间范畴存在许多 Cartesian 闭子范畴, 例如, 由所有紧生成的 Hausdorff 拓扑空间构成的满子范畴是 Cartesian 闭范畴 (如果一个拓扑空间存在一个由紧子集构成的基, 则称该拓扑空间是紧生成的), 这时幂对象 Y^X 是 X 到 Y 的所有连续映射赋予紧开拓扑, 计值态射为通常的计值映射.

命题 3.4.7　设 $\mathcal{C}$ 是 Cartesian 闭范畴, $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个同构闭的满子范畴.

(1) 若 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反射子范畴并且反射函子保持有限积, 则 $\mathcal{D}$ 是 Cartesian 闭范畴.

(2) 若 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的余反射子范畴并且 $\mathcal{D}$ 对有限积封闭, 则 $\mathcal{D}$ 是 Cartesian 闭范畴.

证明　(1) 设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是反射函子. 首先对任意的 $D_1,D_2\in \mathrm{ob}\mathcal{D}$, 注意到 $\mathcal{D}$ 中任意一个对象的 $\mathcal{D}$ 反射都是一个同构, 故由题设可得 $F(D_1\times D_2)=F(D_1)\times_{\mathcal{D}} F(D_2)=D_1\times_{\mathcal{D}} D_2$, 并且由包含函子 $\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 保持极限可得 $D_1\times_{\mathcal{D}} D_2=D_1\times D_2$, 因此 $\mathcal{D}$ 对有限积封闭. 我们只需说明 $\mathcal{D}$ 对幂对象封闭即可.

注意到对任意的 $C_1, C_2 \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, 若 $\eta_{C_1}: C_1 \to F(C_1)$ 是 C_1 的 $\mathcal{D}$ 反射, $\eta_{C_2}: C_2 \to F(C_2)$ 是 C_2 的 $\mathcal{D}$ 反射, 则 $\eta_{C_1} \times \eta_{C_2}: C_1 \times C_2 \to F(C_1 \times C_2) = F(C_1) \times F(C_2)$ 是 $C_1 \times C_2$ 的 $\mathcal{D}$ 反射.

$$\begin{array}{ccc} C_1 \times C_2 & \xrightarrow{\eta_{C_1 \times C_2}} & F(C_1 \times C_2) = F(C_1) \times F(C_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_1 \times C_2 & \xrightarrow{\eta_{C_1} \times \eta_{C_2}} & F(C_1) \times F(C_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_i & \xrightarrow{\eta_{C_i}} & F(C_i) \end{array}$$

设 A, B 是 $\mathcal{D}$ 中的一对对象, B^A 的 $\mathcal{D}$ 反射记作 $r: B^A \to C$. 由上面的论述可知 $1_A \times r: A \times B^A \to A \times C$ 是 $A \times B^A$ 的 $\mathcal{D}$ 反射. 这时存在唯一的态射 $f: A \times C \to B$ 使得 $e = f(1_A \times r)$, 进一步存在唯一态射 $\hat{f}: C \to B^A$ 使得 $f = e(1_A \times \hat{f})$, 即下面方形中的两个三角形交换:

$$\begin{array}{ccc} A \times B^A & \xrightarrow{1_A \times r} & A \times C \\ {\scriptstyle e}\downarrow & \overset{f}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle 1_A \times \hat{f}} \\ B & \xleftarrow{e} & A \times B^A \end{array}$$

这时我们有 $e(1_A \times (\hat{f}r)) = e((1_A \times \hat{f})(1_A \times r)) = f(1_A \times r) = e = e(1_A \times 1_{B^A})$, 由唯一性可得 $\hat{f}r = 1_{B^A}$. 另一方面 $(r\hat{f})r = 1_C r$, 由反射的万有性质可知 $r\hat{f} = 1_C$, 因此 $r: B^A \to C$ 是一个同构, $B^A \in \mathrm{ob}\mathcal{D}$.

(2) 设 A, B 是 $\mathcal{D}$ 中的对象, $e: A \times B^A \to B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的计值态射, 令 $c: D \to B^A$ 是 B^A 的 $\mathcal{D}$ 余反射, 则容易验证复合 $e(1_A \times c): A \times D \to B$ 是 $\mathcal{D}$ 中的计值态射. □

练习 3.4

1. 证明任意一个集合的幂集格 (按包含序) 看作一个范畴是 Cartesian 闭范畴. 进一步证明任意一个 Bool 代数看作一个范畴是 Cartesian 闭范畴.

2. 设 L 是一个完备格看作一个范畴. 证明 L 是 Cartesian 闭范畴当且仅当 L 是一个完备的 Heyting 代数, 即 L 满足分配律:

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} a \wedge b_i, \qquad a \in L, \{b_i \mid i \in I\} \subseteq L$$

3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 Cartesian 闭范畴, 证明下面同构成立:

(1) $A^{B \times C} \cong (A^B)^C$.

(2) $(\prod A_i)^B \cong \prod(A_i^B)$.

3.5　范畴上的模结构

如果我们给定一对伴随函子 $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 那么在多大程度上伴随性可以由范畴 $\mathcal{A}$ 的性质来确定呢? 我们来考虑伴随性在范畴 $\mathcal{A}$ 上确定的构造及其性质.

由伴随性我们可以得到函子 $T = GF : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 以及伴随单位 $\eta : 1_{\mathcal{A}} \to T$, 另外我们还可以形成自然变换 $\mu = G\varepsilon F : TT = GFGF \to GF = T$, 这些构造能够满足下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} TT & \xleftarrow{\eta T} & T \\ {\scriptstyle T\eta}\uparrow & \searrow^{\mu} & \downarrow \\ T & \longrightarrow & T \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} TTT & \xrightarrow{T\mu} & TT \\ {\scriptstyle \mu T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ TT & \xrightarrow{\mu} & T \end{array}$$

如果我们把 T 看成一个集合, $\mu : TT \to T$ 看作 T 上的一个二元运算, 而 $\eta : 1_{\mathcal{A}} \to T$ 看作 T 上的一个元素, 则上面两个交换的图表表明 $\mu : TT \to T$ 是 T 上的一个满足 "结合律" 的二元运算, 并且 $\eta : 1_{\mathcal{A}} \to T$ 在该运算下是 T 上的一个 "单位元素", 因此 (T, η, μ) 可以看作一个抽象的具有单位元素的半群构造, 我们称之为 **模** (monad). 本节我们来证明函子的伴随性 $(F \dashv G)$ 在一定程度上由范畴 $\mathcal{A}$ 上的模构造确定.

定义 3.5.1　范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个**模** (monad)(T, η, μ) 是由函子 $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, 两个自然变换 $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to T$ 和 $\mu : TT \to T$ 组成满足下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} TT & \xleftarrow{\eta T} & T \\ {\scriptstyle T\eta}\uparrow & \searrow^{\mu} & \downarrow \\ T & \longrightarrow & T \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} TTT & \xrightarrow{T\mu} & TT \\ {\scriptstyle \mu T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ TT & \xrightarrow{\mu} & T \end{array}$$

例 3.5.2　设 M 是一个有单位元素的半群, M 在集合上的作用形成集合范畴 Set 上的一个模. 事实上考虑积函子

$$T = M \times - : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set} \text{ 和自然变换}$$

$$\eta : 1_{\mathrm{Set}} \to T, \ (\eta_A : a \mapsto (e, a));$$

$$\mu : TT \to T, \ (\mu_A : (m, (n, a)) \mapsto (mn, a))$$

这里 e 是 M 中的单位元素. 容易验证如此定义的 (T, η, μ) 是范畴 Set 上的一个模.

由前面的论述我们知道任意一对伴随函子都可以 "自然地" 确定一个模, 反之范畴上的任意一个模是否可以由一对伴随函子 "自然地" 确定呢? 1965 年, S.Eilenberg

和 J.Moore 给出了这个问题的肯定回答, 同一年 H.Kleisli 给出了另一个不同方法的回答. 本节中我们采用 Eilenberg-Moore 的构造.

定义 3.5.3 设 $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个模, $A\in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, $h:T(A)\to A$ 是态射, 若下面图表交换:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) \\ & \searrow & \downarrow h \\ & & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} TTA & \xrightarrow{T(h)} & T(A) \\ \mu_A\downarrow & & \downarrow h \\ TA & \xrightarrow{h} & A \end{array}$$

我们称序对 (A,h) 是一个 $\mathbb{T}$ 代数. $\mathbb{T}$ 代数 (A,h) 与 (B,r) 之间的一个态射 $f:(A,h)\to(B,r)$ 是指 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f:A\to B$ 满足下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{T(f)} & T(B) \\ h\downarrow & & \downarrow r \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

容易验证$\mathbb{T}$ 代数态射可以进行复合运算并且满足结合律, 因此全体$\mathbb{T}$ 代数构成一个范畴, 称为Eilenberg-Moore 范畴, 记作 $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$.

范畴 $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ 到范畴 $\mathcal{C}$ 存在一个遗忘函子:

$$G^{\mathbb{T}}:\mathcal{C}^{\mathbb{T}}\to\mathcal{C},\ (f:(A,h)\to(B,r))\mapsto(f:A\to B)$$

例 3.5.4 考虑例 3.5.2 中的集合范畴 Set 上的模 $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$. 这时一个 $\mathbb{T}$ 代数是一个集合 X 上的一个"结构"映射 $h:M\times X\to X$ 满足条件:

$$h(m,h(n,x))=h(mn,x),\qquad h(e,x)=x.$$

如果我们将 $h(m,x)$ 记作 $m\cdot x$, 则一个 $\mathbb{T}$ 代数其实就是半群 M 对集合 X 的一个作用.

定理 3.5.5 设$\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个模, 则遗忘函子 $G^{\mathbb{T}}:\mathcal{C}^{\mathbb{T}}\to\mathcal{C}$ 存在左伴随 $F^{\mathbb{T}}$, 并且由伴随 $F^{\mathbb{T}}\dashv G^{\mathbb{T}}$ "自然地" 确定的模就是模 $\mathbb{T}$.

证明 对任意的 $A\in\mathrm{ob}\mathcal{C}$, 定义 $F^{\mathbb{T}}(A)=(T(A),\mu_A)$, 由 $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$ 的模性质可以直接验证 $(T(A),\mu_A)$ 是一个 $\mathbb{T}$ 代数. 对 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f:A\to B$, 令 $F^{\mathbb{T}}(f)=T(f):F^{\mathbb{T}}(A)\to F^{\mathbb{T}}(B)$, 则 $F^{\mathbb{T}}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ 是一个函子, 并且 $G^{\mathbb{T}}F^{\mathbb{T}}=T$, 因此存在自然变换 $\eta^{\mathbb{T}}=\eta:1_{\mathcal{C}}\to G^{\mathbb{T}}F^{\mathbb{T}}$. 另外对任意的 $(A,h)\in\mathrm{ob}\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$, 令

$$\varepsilon^{\mathbb{T}}_{(A,h)}:F^{\mathbb{T}}G^{\mathbb{T}}(A,h)=(T(A),\mu_A)\to(A,h),\qquad \varepsilon^{\mathbb{T}}_{(A,h)}=h$$

$$\begin{array}{ccc} TT(A) & \xrightarrow{\mu_A} & T(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(A) & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

则我们可以直接验证 $\varepsilon^{\mathbb{T}} : F^{\mathbb{T}}G^{\mathbb{T}} \to 1_{\mathcal{C}^{\mathbb{T}}}$ 是一个自然变换.

$$\begin{array}{ccccc} & TT(A) & \xrightarrow{\mu_A} & T(A) & \\ TT(f)\swarrow & \vdots T(h) & T(f)\swarrow & & \downarrow h \\ TT(B) \xrightarrow{\mu_B} T(B) & & & & \\ \downarrow T(r) & T(A) & \cdots\xrightarrow{h}\cdots & A & \\ & T(f)\swarrow & \downarrow r & f\swarrow & \\ T(B) & \xrightarrow{r} & B & & \end{array}$$

进一步可以验证 $\eta^{\mathbb{T}}$ 与 $\varepsilon^{\mathbb{T}}$ 满足条件 $(G^{\mathbb{T}}\varepsilon^{\mathbb{T}})(\eta^{\mathbb{T}}G^{\mathbb{T}}) = 1_{G^{\mathbb{T}}}$, $(\varepsilon^{\mathbb{T}}F^{\mathbb{T}})(F^{\mathbb{T}}\eta^{\mathbb{T}}) = 1_{F^{\mathbb{T}}}$, 因此 $F^{\mathbb{T}} \dashv G^{\mathbb{T}}$ 使得 $\eta^{\mathbb{T}}$ 是伴随单位而 $\varepsilon^{\mathbb{T}}$ 是伴随余单位.

另外由于 $G^{\mathbb{T}}F^{\mathbb{T}} = T$, $\eta^{\mathbb{T}} = \eta$ 是伴随 $F^{\mathbb{T}} \dashv G^{\mathbb{T}}$ 的单位, 并且对任意的 $A \in \text{ob}\mathcal{C}$, $G^{\mathbb{T}}\varepsilon^{\mathbb{T}}F^{\mathbb{T}}(A) = G^{\mathbb{T}}\varepsilon^{\mathbb{T}}(T(A),\mu_A) = G^{\mathbb{T}}(\mu_A) = \mu_A$, 因此伴随 $F^{\mathbb{T}} \dashv G^{\mathbb{T}}$ "自然地" 确定的模就是模 $\mathbb{T}$. □

接下来我们考虑这样的问题: 给定一对伴随函子 $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 我们可以 "自然地" 得到 $\mathcal{A}$ 上的一个模 $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$, 从而得到另一对伴随 $(F^{\mathbb{T}}, G^{\mathbb{T}}, \eta^{\mathbb{T}}, \varepsilon^{\mathbb{T}}) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathbb{T}}$. 那么 Eilenberg-Moore 范畴 $\mathcal{A}^{\mathbb{T}}$ 与范畴 $\mathcal{B}$ 具有什么样的关系呢? 下面的伴随比较定理给出了该问题的答案.

定理 3.5.6　存在唯一的函子 $K : \mathcal{B} \to \mathcal{A}^{\mathbb{T}}$ 满足条件 $G^{\mathbb{T}}K = G$, $KF = F^{\mathbb{T}}$, 即下面图表交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{B} \\ F^{\mathbb{T}}\downarrow & \swarrow K & \downarrow G \\ \mathcal{A}^{\mathbb{T}} & \xrightarrow[G^{\mathbb{T}}]{} & \mathcal{A} \end{array}$$

证明　对任意的 $B \in \text{ob}\mathcal{B}$, 考虑态射 $G(\varepsilon_B) : TG(B) = GFG(B) \to G(B)$. 不

难看出下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} TTG(B) & \xrightarrow{TG(\varepsilon_B)} & TG(B) \\ {\scriptstyle \mu_{G(B)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(\varepsilon_B)} \\ TG(B) & \xrightarrow{G(\varepsilon_B)} & G(B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G(B) & \xrightarrow{\eta_{G(B)}} & TG(B) \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle G(\varepsilon_B)} \\ & & G(B) \end{array}$$

因此 $(G(B), G(\varepsilon_B))$ 是一个 $\mathbb{T}$ 代数. 对 $\mathcal{B}$ 中任意态射 $f: B \to B'$, 我们定义 $K(f) = G(f) : (G(B), G(\varepsilon_B)) \to (G(B'), G(\varepsilon_{B'}))$. 不难验证 $K(f)$ 是一个 $\mathbb{T}$ 代数态射并且 $K: \mathcal{B} \to \mathcal{A}^{\mathbb{T}}$ 是一个函子满足 $G^{\mathbb{T}}K = G$, $KF = F^{\mathbb{T}}$.

欲证 K 的唯一性, 设函子 $K': \mathcal{B} \to \mathcal{A}^{\mathbb{T}}$ 满足条件 $G^{\mathbb{T}}K' = G$, $K'F = F^{\mathbb{T}}$. 则对 $\mathcal{B}$ 中的任意态射 $f: B \to B'$, 由条件 $G^{\mathbb{T}}K' = G$ 可知 $K'(f) = G(f) : G(B) \to G(B')$, 因此 $K'(B)$ 是一个形如 $(G(B), h)$ 的 $\mathbb{T}$ 代数, 所以我们只需说明 $h = G(\varepsilon_B)$ 即可. 考虑 $\mathcal{B}$ 中的态射 $\varepsilon_B : FG(B) \to B$, $K'(\varepsilon_B) = G(\varepsilon_B) : K'FG(B) = F^{\mathbb{T}}G(B) \to K'(B)$ 是一个 $\mathbb{T}$ 代数态射, 考虑下面的图表:

$$\begin{array}{ccccc} TTG(B) & & \xrightarrow{\quad TG(\varepsilon_B) \quad} & & TG(B) \\ & \nwarrow^{T(\eta_{G(B)})} & & \nearrow^{1_{TG(B)}} & \\ {\scriptstyle \mu_{G(B)}}\downarrow & & TG(B) & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ & \swarrow_{1_{TG(B)}} & & & \\ TG(B) & & \xrightarrow{\quad G(\varepsilon_B) \quad} & & G(B) \end{array}$$

该图表的外面的方形和上面的两个三角形都交换, 因此下面的三角形交换, 故 $h = G(\varepsilon_B)$. □

我们称定理 3.5.6 中的唯一函子 K 为伴随 $(F \dashv G)$ 与伴随 $(F^{\mathbb{T}} \dashv G^{\mathbb{T}})$ 的比较函子. 在许多具体的伴随结构中, 比较函子 K 是一个同构. 一般地若伴随 $(F \dashv G)$ 对应的比较函子 K 是一个同构, 我们称函子 G 是**可模的** (monadic).

例 3.5.7 我们来考虑半群范畴 SmGp(即由半群为对象, 半群同态为态射构成的范畴) 到集合范畴的遗忘函子 $G: \mathrm{SmGp} \to \mathrm{Set}$. G 存在左伴随 $F: \mathrm{Set} \to \mathrm{SmGp}$ 使得对任意集合 X, $F(X)$ 是由 X 生成的自由半群, 即 $F(X)$ 可表达为

$$F(X) = \{\langle x_1, \cdots, x_n \rangle \mid x_i \in X, i = 1, \cdots, n, n \in \mathbb{N}\}$$

这里 $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle \langle y_1, \cdots, y_m \rangle = \langle x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m \rangle$. 同时伴随 $(F \dashv G)$ 的单位 $\eta: 1_{\mathrm{Set}} \to GF$ 使得对任意的集合 X,

$$\eta_X : X \to GF(X), \qquad (x \mapsto \langle x \rangle)$$

余单位 $\varepsilon: FG \to 1_{\mathrm{SmGp}}$ 使得对任意一个半群 S,

$$\varepsilon_S: FG(S) \to S,\ (\langle s_1, \cdots, s_n\rangle \mapsto s_1 \cdots s_n)$$

伴随 $(F \dashv G)$ “自然地” 确定的模为 $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$, 其中 $T = GF: \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ 使得对任意一个集合 X, $T(X)$ 可以看作并集 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$, 而 $\mu = G\varepsilon F: TT \to T$ 使得对任意一个集合 X,

$$\mu_X: \langle\langle x_{11}, \cdots, x_{1n_1}\rangle, \cdots, \langle x_{k1}, \cdots, x_{kn_k}\rangle\rangle \mapsto \langle x_{11}, \cdots, x_{1n_1}, \cdots, x_{k1}, \cdots, x_{kn_k}\rangle,\ k \in \mathbb{N}$$

这时比较函子 $K: \mathrm{SmGp} \to \mathrm{Set}^{\mathbb{T}}$ 把每个半群 S 对应为 $\mathbb{T}$ 代数 $(G(S), G\varepsilon_S)$, 而 $G\varepsilon_S: TG(S) \to G(S)$ 其实就是通常的乘积映射. 反之我们考虑任意一个 $\mathbb{T}$ 代数 (X, h), 如果我们视 $h: T(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n \to X$ 为 X 上的一个有限运算, 即记 $h(x_1, \cdots, x_n) = x_1 \cdots x_n$, 则 $\mathbb{T}$ 代数条件 $hT(h) = h\mu_X$ 成立蕴涵着该有限运算满足结合律, 因此集合 X 在该运算下是一个半群, 而 $h: T(X) \to X$ 是通常的乘积映射. 这表明比较函子 K 是一个同构, 从而 G 是可模的.

例 3.5.8　设范畴 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反射子范畴, 则容易验证包含函子 $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是可模的.

例 3.5.9　考虑拓扑空间范畴 Top 到集合范畴的遗忘函子 $G: \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$. G 存在左伴随 $D: \mathrm{Set} \to \mathrm{Top}$ 使得对任意集合 X, $D(X)$ 是集合 X 上赋予离散拓扑的拓扑空间, 而伴随的单位和余单位均为恒同映射 1. 这时由伴随 $(D \dashv G)$ “自然地” 确定的模为 $\mathbb{T} = (T, 1, 1)$, 因此 Eilenberg-Moore 范畴 $\mathrm{Set}^{\mathbb{T}}$ 同构于集合范畴 Set, 比较函子 $K: \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}^{\mathbb{T}} = \mathrm{Set}$ 不是同构, 故 G 不是可模的.

练习 3.5

1. 设 $P: \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ 是幂集函子, 即对任意一个集合 X, $P(X) = 2^X$, 若 $f: X \to Y$, 则对任意的 $A \subseteq X$, $P(f): 2^X \to 2^Y$, $P(f)(A) = f(A)$. 对任意一个集合 X, 令 $\eta_X: X \to P(X)$, $x \mapsto \{x\}$ 而 $\mu_X: PP(X) \to P(X)$ 将每一个集合族对应为该集合族的并. 证明:

(1) $\eta: 1_{\mathrm{Set}} \to P$ 和 $\mu: PP \to P$ 定义了两个自然变换.

(2) $\mathbb{P} = (P, \eta, \mu)$ 是集合范畴 Set 上的一个模.

(3) 设 (X, h) 是一个 $\mathbb{P}$ 代数, 在集合 X 上定义一个二元关系 $x \leqslant y \iff h(\{x, y\}) = y$. 证明 $\leqslant$ 是 X 上的一个偏序关系, 进一步 $(X, \leqslant)$ 是一个完备格使得对任意的 $A \subseteq X$, $\bigvee A = h(A)$.

2. 试证明若范畴 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反射子范畴, 则包含函子 $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是可模的.

3. 证明遗忘函子 $G^{\mathbb{T}}: \mathcal{C}^{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}$ 产生极限.

4. 对范畴 $\mathcal{C}$ 上的任意两个模 (T,η,μ) 和 (T',η',μ'), 试定义一个合适的自然变换 $\theta: T\to T'$, 使得这样定义了 (T,η,μ) 和 (T',η',μ') 之间的一个态射构成了一个以 $\mathcal{C}$ 上的所有模为对象的范畴.

3.6 Beck 定理

上一节我们讨论了函子 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $G:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ 的伴随性 $(F\dashv G)$ 与范畴 $\mathcal{A}$ 上的模构造之间的关系, 如果函子 G 是可模的, 即比较函子 $K:\mathcal{B}\to\mathcal{A}^{\mathbb{T}}$ 是一个同构, 则伴随性 $(F\dashv G)$ 可以由范畴 $\mathcal{A}$ 上的模构造完全唯一确定. 本节我们来给出函子 G 是可模的一个非常适用的判别准则.

首先我们需要定义两种特殊的余等值子 ——分裂余等值子 (split coequalizer) 和绝对余等值子 (absolute coequalizer).

定义 3.6.1 (1) 在范畴 $\mathcal{C}$ 中, 图表 $A\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}B\xrightarrow{c}C$ 满足 $cf=cg$. 如果对任意函子 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, $G(c):G(B)\to G(C)$ 都是平行对态射 $G(f),G(g):G(A)\to G(B)$ 的余等值子, 则称 $c:B\to C$ 是平行对态射 $f,g:A\to B$ 的**绝对余等值子** (absolute coequalizer).

(2) 设图表 $A\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}B\xrightarrow{c}C$ 满足 $cf=cg$. 如果存在态射 $s:C\to B$, $t:B\to A$ 满足

$$cs=1_C,\qquad ft=1_B,\qquad gt=sc$$

则称 $c:B\to C$ 是平行对态射 $f,g:A\to B$ 的**分裂余等值子** (split coequalizer).

由定义 (1) 容易看出绝对余等值子一定是余等值子, 但是反之不成立.

引理 3.6.2 若 $c:B\to C$ 是平行对态射 $f,g:A\to B$ 的分裂余等值子, 则 $c:B\to C$ 是 $f,g:A\to B$ 的余等值子.

证明 设 $c':B\to C'$ 满足 $c'f=c'g$. 令 $h=c's:C\to C'$, 则有 $hc=c'sc=c'gt=c'ft=c'$, 即 c' 可通过 c 分解. 另外若 $h'c=c'=hc$, 则 $h'=h'1_C=h'cs=hcs=h$, 故 c' 的分解是唯一的. □

由于分裂余等值子完全由态射的复合和等式确定, 不涉及万有性, 因此可以被任意函子保持. 结合引理 3.6.2 我们立即有下面推论.

推论 3.6.3 若 $c:B\to C$ 是平行对态射 $f,g:A\to B$ 的分裂余等值子, 则 $c:B\to C$ 是 $f,g:A\to B$ 的绝对余等值子.

回忆函子 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 产生余等值子是指如果范畴 $\mathcal{C}$ 中的平行对态射 $f,g:A\to B$ 使得 $d:G(B)\to D$ 是范畴 $\mathcal{D}$ 中的平行对态射 $G(f),G(g):G(A)\to G(B)$ 的余等值子, 则范畴 $\mathcal{C}$ 中存在唯一的态射 $c:B\to C$ 使得 $G(c)=d:G(B)\to G(C)=D$ 并且 $c:B\to C$ 是平行对态射 $f,g:A\to B$ 的余等值子.

定理 3.6.4(Beck 定理)　给定伴随函子 $(F,G,\eta,\varepsilon):\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, 设 $\mathcal{A}$ 上自然地得到的模为 $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$, 对应的伴随为 $(F^{\mathbb{T}},G^{\mathbb{T}},\eta^{\mathbb{T}},\varepsilon^{\mathbb{T}}):\mathcal{A}\to\mathcal{A}^{\mathbb{T}}$, 比较函子为 $K:\mathcal{B}\to\mathcal{A}^{\mathbb{T}}$. 则下面条件等价:

(1) $K:\mathcal{B}\to\mathcal{A}^{\mathbb{T}}$ 是一个同构.

(2) 函子 G 产生满足如下条件的平行对态射 $f,g:A\to B$ 的余等值子:

$G(f),G(g):G(A)\to G(B)$ 在 $\mathcal{A}$ 中具有绝对余等值子.

(3) 函子 G 产生满足如下条件的平行对态射 $f,g:A\to B$ 的余等值子:

$G(f),G(g):G(A)\to G(B)$ 在 $\mathcal{A}$ 中具有分裂余等值子.

证明　(1)⇒(2) 注意到同构产生任意极限和余极限, 所以我们只需考虑遗忘函子 $G^{\mathbb{T}}:\mathcal{A}^{\mathbb{T}}\to\mathcal{A}$ 满足对应的条件.

设 $f,g:(A,h)\to(B,r)$ 是 $\mathcal{A}^{\mathbb{T}}$ 中的一对平行态射使得 $c:B\to C$ 是平行对态射 $f,g:A\to B$ 在 $\mathcal{A}$ 中的绝对余等值子, 我们来构造一个唯一的 $\mathbb{T}$ 代数 $t:T(C)\to C$ 使得 $t:T(C)\to C$ 成为平行对态射 $f,g:(A,h)\to(B,r)$ 的余等值子. 考虑下面图表:

$$
\begin{array}{ccccc}
T(A) & \overset{T(f)}{\underset{T(g)}{\rightrightarrows}} & T(B) & \xrightarrow{T(c)} & T(C) \\
{\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} & & \vdots{\scriptstyle t} \\
A & \overset{g}{\underset{f}{\rightrightarrows}} & B & \xrightarrow{c} & C
\end{array}
$$

这时我们有 $crT(f)=cfh=cgh=crT(g)$, 但是 $T(c):T(B)\to T(C)$ 是平行对态射 $T(f),T(g):T(A)\to T(B)$ 的余等值子, 故存在唯一的态射 $t:T(C)\to C$ 使得 $cr=tT(c)$. 为了说明 $t:T(C)\to C$ 是一个 $\mathbb{T}$ 代数, 我们来考虑下面图表:

$$
\begin{array}{ccccccc}
TT(C) & & & \xrightarrow{T(t)} & & & T(C) \\
 & \nwarrow{\scriptstyle TT(c)} & & & & \nearrow{\scriptstyle T(c)} & \\
 & & TT(B) & \xrightarrow{T(r)} & T(B) & & \\
{\scriptstyle \mu_C}\downarrow & & {\scriptstyle \mu_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} & & \downarrow{\scriptstyle t} \\
 & & T(B) & \xrightarrow{r} & B & & \\
 & \swarrow{\scriptstyle T(c)} & & & & \searrow{\scriptstyle c} & \\
T(C) & & & \xrightarrow{t} & & & C
\end{array}
$$

由 t 的定义和 μ 的自然性可知外面的四个方形均交换, 因此我们有

$$
tT(t)TT(c)=t\mu_C TT(c)
$$

但是 c 是绝对余等值子, 故 $TT(c)$ 是余等值子从而是满态射, 因此有 $tT(t) = t\mu_C$, 即外面的方形交换. 类似地可以证明 $t\eta_C = 1_C$, 因此 $t : T(C) \to C$ 是一个 $\mathbb{T}$ 代数.

为了说明 $t : T(C) \to C$ 是平行对 $f, g : (A, h) \to (B, r)$ 的余等值子, 考虑任意一个 $\mathbb{T}$ 代数态射 $d : (B, r) \to (D, s)$ 满足 $df = dg$. 由于 $c : B \to C$ 是平行对 $f, g : A \to B$ 的绝对余等值子, 因此存在唯一的态射 $m : C \to D$ 使得 $d = mc$, 类似于上面的论述, 我们可以得到 $mtT(c) = sT(m)T(c)$, 从而由 $T(c)$ 是满态射可得 $mt = sT(m)$, 即 $m : (C, t) \to (D, s)$ 是一个 $\mathbb{T}$ 代数态射.

(2)⇒(3) 由于分裂余等值子是绝对余等值子因此 (2)⇒(3) 是显然的.

(3)⇒(1) 设 $h : T(A) \to A$ 是一个 $\mathbb{T}$ 代数, 则由 $\mathbb{T}$ 代数定义我们有 $hT(h) = h\mu_A$ 成立, 另外由 $\mathbb{T}$ 代数定义、伴随单位的性质及 η 的自然性我们有下面等式成立:

$$h\eta_A = 1_A, \qquad \mu_A\eta_{T(A)} = 1_{T(A)}, \qquad T(h)\eta_{T(A)} = \eta_A h,$$

因此 $h : GF(A) = T(A) \to A$ 是平行对态射 $T(h), \mu_A : TT(A) = GFGF(A) \to T(A) = GF(A)$ 的分裂余等值子. 由题设可知在范畴 $\mathcal{B}$ 中存在唯一的态射 $\tilde{h} : F(A) \to B$ 使得 $G(\tilde{h}) = h : GF(A) \to G(B) = A$ 并且 $\tilde{h} : F(A) \to B$ 是平行对态射 $F(h), \varepsilon_{F(A)} : FGF(A) \to F(A)$ 的余等值子. 记 B 为 $L(A, h)$, 若 $f : (A, h) \to (A', h')$ 是一个 $\mathbb{T}$ 代数态射, 考虑下面图表:

$$\begin{array}{ccccc}
FGF(A) & \underset{\varepsilon_{F(A)}}{\overset{F(h)}{\rightrightarrows}} & F(A) & \xrightarrow{\tilde{h}} & L(A,h) \\
\downarrow{\scriptstyle FGF(f)} & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \vdots{\scriptstyle L(f)} \\
FGF(A') & \underset{F(h')}{\overset{\varepsilon_{F(A')}}{\rightrightarrows}} & F(A') & \xrightarrow{\tilde{h'}} & L(A',h')
\end{array}$$

由于左边内外两个方形均交换, 因此有 $(\tilde{h'}F(f))F(h) = \tilde{h'}F(h')FGF(f) = \tilde{h'}\varepsilon_{F(A')}FGF(f) = (\tilde{h'}F(f))\varepsilon_{F(A)}$. 但是 $\tilde{h} : A \to B$ 是平行对 $F(h), \varepsilon_{F(A)} : FGF(A) \to F(A)$ 的余等值子, 因此存在唯一的态射 $L(f) : L(A, h) \to L(A', h')$ 使得 $\tilde{h'}F(f) = L(f)\tilde{h}$, 容易验证 $L : \mathcal{A}^{\mathbb{T}} \to \mathcal{B}$ 定义了一个函子并且 $LK = 1_{\mathcal{B}}$. 欲证 $KL = 1_{\mathcal{A}^{\mathbb{T}}}$, 设 $h : T(A) \to A$ 是一个 $\mathbb{T}$ 代数, 则由于 $G(L(A, h)) = A$, 故只需说明 $\varepsilon_{L(A,h)} = \tilde{h}$ 即可.

由于 $G(\varepsilon_{L(A,h)}) : TG(L(A, h)) \to G(L(A, h))$ 是一个 $\mathbb{T}$ 代数, 由 $\mathbb{T}$ 代数性质可知 $G(\tilde{h})\eta_A = h\eta_A = 1_A = G(\varepsilon_{L(A,h)})\eta_{G(L(A,h))} = G(\varepsilon_{L(A,h)})\eta_A$, 由命题 3.1.7 关于伴随单位的万有性可知 $\tilde{h} = \varepsilon_{L(A,h)}$. □

例 3.6.5 如果范畴 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反射子范畴, 则包含函子 $I : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是可模的. 事实上若 $\mathcal{D}$ 中的平行对态射 $f, g : A \to B$ 使得 $h : B \to C$ 是该平行对态射在 $\mathcal{C}$ 中的分裂余等值子, 我们来说明 $C \in \mathrm{ob}\mathcal{D}$.

设 $s : C \to B$, $t : B \to A$ 满足 $hs = 1_C$, $ft = 1_B$, $gt = sh$, 则不难验证 $s : C \to B$ 是平行对 $sh, 1_B : B \to B$ 的等值子. 但是 $B \in \mathrm{ob}\mathcal{D}$ 并且 $\mathcal{D}$ 作为 $\mathcal{C}$ 的反

射子范畴对极限封闭, 因此 $C \in \mathrm{ob}\mathcal{D}$, 从而由定理 3.6.4 知 I 是可模的.

例 3.6.6　从紧 Hausdorff 拓扑空间范畴 Hcomp 到集合范畴 Set 的遗忘函子 $U:\mathrm{Hcopm} \to \mathrm{Set}$ 是可模的. 首先函子 U 存在左伴随 $F:\mathrm{Set} \to \mathrm{Hcomp}$ 使得任意一个集合 X, $F(X)$ 是以 X 为底集的离散拓扑空间的 Stone-Čech 紧化. 其次若 Hcomp 中的平行对态射 $f,g:A\to B$ 使得 $h:B\to C$ 是该平行对态射在集合范畴中的分裂余等值子, 这里 $s:C\to B$, $t:B\to A$ 满足 $hs=1_C$, $ft=1_B$, $gt=sh$, 我们来说明集合 C 上存在唯一的紧 Hausdorff 拓扑, 使得 $h:B\to C$ 成为 $f,g:A\to B$ 在 Hcomp 中的余等值子. 事实上满足条件的拓扑只能是商拓扑, 因为 B 是紧的因此商拓扑一定是紧的, 我们只需要说明它是 Hausdorff 的即可.

设 B 上的等价关系 R 使得 $C=B/R$. 我们知道商空间 $C=B/R$ 是 Hausdorff 空间当且仅当 $R\subseteq B\times B$ 是一个闭集, 令 $S=\{(b_1,b_2)\in B\times B \mid \exists a_1,a_2\in A, g(a_1)=g(a_2), f(a_1)=b_1, f(a_2)=b_2\}$, 则由等值子条件有 $S\subseteq R=\{(b_1,b_2)\in B\times B \mid h(b_1)=h(b_2)\}$. 反之设 $(b_1,b_2)\in R$, 则 $gt(b_1)=sh(b_1)=sh(b_2)=gt(b_2)$, 因此若取 $a_1=t(b_1), a_2=t(b_2)$, 则可以看出 $(b_1,b_2)\in S$, 因此 $R=S$. 但是 S 是 $A\times A$ 中的闭集 $\{(a_1,a_2)\in A\times A \mid g(a_1)=g(a_2)\}$ 在连续映射 $f\times f:A\times A\to B\times B$ 下的像集, 因此是 $B\times B$ 中的闭集.

练习 3.6

1. 举例说明余等值子不必是绝对余等值子.

2. 试给出一个分裂余等值子的例子.

3. 设 X 和 Y 是集合, $f:X\to Y$ 是映射, 如果将幂集格看作范畴, 则 f 诱导出一个函子 $P(f):P(X)\to P(Y)$. 证明函子 $P(f)$ 是可模的当且仅当 f 是一个满映射.

4. 给定伴随函子$(F,G,\eta,\varepsilon):\mathcal{A}\to\mathcal{B}$. 证明如果范畴 $\mathcal{B}$ 存在余等值子, 并且函子 G 保持和反射余等值子, 则比较函子 $K:\mathcal{B}\to\mathcal{A}^{\mathbb{T}}$ 是一个等价函子.



第 4 章　加法范畴与 Abel 范畴

在数学研究中我们经常遇到的范畴都是所谓的"结构范畴"，即范畴的对象是集合赋予某种结构，而态射则是保持这种结构的映射. 例如，群范畴 Gp，环范畴 Rng，R 模范畴 $\mathrm{Mod_R}$ 和拓扑空间范畴 Top 等. 在一些"结构范畴"中，任意两个对象之间的态射集自身也具有这种结构，如 Abel 群范畴 AbGp. Abel 群范畴 AbGp 的范畴形式的推广 Abel 范畴在代数拓扑学中有着广泛的应用，尤其在同调代数研究中成为一个重要的工具. 本章我们介绍 Abel 范畴的一些基本内容和方法.

4.1　加法范畴

定义 4.1.1　若范畴 $\mathcal{C}$ 满足对任意的 $A, B \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$，$\mathcal{C}(A, B)$ 是一个 Abel 加法群并且 $\mathcal{C}$ 中态射的复合是双线性的，即对任意的态射 $f, f' : A \to B$，$g, g' : B \to A$，下面等式成立：

$$(g + g')(f + f') = gf + gf' + g'f + g'f',$$

则称 $\mathcal{C}$ 是一个 **准加法范畴** (preadditive category).

例 4.1.2　Abel 群范畴 AbGp 和 R 模范畴 $\mathrm{Mod_R}$ 都是准加法范畴.

若 $\mathcal{C}$ 是准加法范畴，则对 $\mathcal{C}$ 中任意两个对象 A, B，Abel 群 $\mathcal{C}(A, B)$ 存在一个零元素 $0 : A \to B$，称之为零态射. 由复合的双线性性质可知任意态射与零态射的复合是一个零态射.

注意，在本书中我们将任意两个对象之间的零态射都记作 0 而没有加以区别，请读者注意不同零态射的值域和定义域的区别.

定义 4.1.3　设 $\mathcal{C}$ 是一个准加法范畴，$f : A \to B$ 是 $\mathcal{C}$ 中态射. 若 $k : C \to A$ 是平行对 $f, 0 : A \to B$ 的等值子，则称 $k : C \to A$ 是 f 的 **核** (kernel)，记作 $k = \ker(f)$. 对偶地，若 $c : B \to C$ 是 $f, 0 : A \to B$ 的余等值子，则称 $c : B \to C$ 是 f 的 **余核** (cokernel)，记作 $c = \mathrm{coker}(f)$.

由定义可以看出 $k : C \to A$ 是 $f : A \to B$ 的核当且仅当 $fk = 0$ 并且对任意的 $k' : C' \to A$ 满足 $fk' = 0$，存在唯一的态射 $t : C' \to C$ 使得 $k' = kt$.

引理 4.1.4　设 $\mathcal{C}$ 是一个准加法范畴，$h : C \to A$ 是 $\mathcal{C}$ 中态射. 下面条件等价：

(1) h 是某个态射的核.

(2) h 是某一对平行态射的等值子.

证明　只需证明 (2)⇒(1). 设 $h: C \to A$ 是平行对 $f, g: A \to B$ 的等值子, 则 $fh = gh$, 因此有 $(f-g)h = 0 = 0h$. 另外若 $h': C' \to A$ 满足 $(f-g)h' = 0h' = 0$, 即 $fh' = gh'$, 则存在唯一的态射 $t: C' \to C$ 使得 $h' = ht$, 故 $h = \ker(f-g)$. □

对偶地, 我们也可以证明在一个准加法范畴中, 态射 g 是某个态射的余核当且仅当 g 是一对平行态射的余等值子. 因此在准加法范畴中我们只需讨论核而不必讨论等值子, 只需讨论余核而不必讨论余等值子.

引理 4.1.5　设 $\mathcal{C}$ 是一个准加法范畴, $A \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$. 下列条件等价:

(1) A 是初始对象.

(2) A 是终对象.

(3) $1_A = 0: A \to A$.

(4) Abel 群 $\mathcal{C}(A, A)$ 是一个平凡群.

证明　(1)⇒(3) 由于 A 是初始对象, 故 $\mathcal{C}(A, A)$ 只有一个元素, 因此 $1_A = 0: A \to A$.

(3)⇒(1) 若 $f: A \to B$, 则 $f = 1_A f = 0f = 0$, 即 A 到任意对象的态射是唯一的零态射, 因此 A 是初始对象.

(2)⇔(3) 对偶地可以证明.

(3)⇔(4) 容易证明. □

若范畴 $\mathcal{D}$ 中的一个对象 Z 既是初始对象也是终对象, 则称 Z 是一个零对象. 由初始对象和终对象的唯一性可知零对象若存在, 则在同构意义下是唯一的. 许多具体范畴中存在零对象, 如群范畴 Gp, Abel 群范畴 AbGp 和环范畴 Rng 中的平凡群和平凡环就是零对象. 如果准加法范畴 $\mathcal{C}$ 中存在零对象 Z, 则对 $\mathcal{C}$ 中任意对象 B, 唯一的态射 $f: Z \to B$ 和 $g: B \to Z$ 都是零态射, 进一步任意的零态射 $0: A \to B$ 都有唯一的分解 $A \to Z \to B$.

引理 4.1.6　设 $\mathcal{C}$ 是一个准加法范畴, $A, B, C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$. 下列条件等价:

(1) C 是 A 与 B 的积.

(2) C 是 A 与 B 的余积.

(3) 存在态射 $p_1: C \to A$, $p_2: C \to B$, $q_1: A \to C$, $q_2: B \to C$ 满足:

$$p_1 q_1 = 1_A, \qquad p_2 q_2 = 1_B, \qquad q_1 p_1 + q_2 p_2 = 1_C.$$

证明　(1)⇒(3) 令 $p_1: C \to A$, $p_2: C \to B$ 为射影, $q_1: A \to C$ 为满足条件 $p_1 q_1 = 1_A$, $p_2 q_1 = 0$ 的唯一态射, 同样令 $q_2: B \to C$ 为满足条件 $p_1 q_2 = 0$, $p_2 q_2 = 1_B$ 的唯一态射. 这时我们有 $p_1(q_1 p_1 + q_2 p_2) = p_1 + 0p_2 = p_1$, $p_2(q_1 p_1 + q_2 p_2) = 0p_1 + p_2 = p_2$, 但是 $p_1 1_C = p_1$, $p_2 1_C = p_2$, 由唯一性知 $q_1 p_1 + q_2 p_2 = 1_C$.

(3)⇒(1) 首先我们有 $p_1 q_2 = p_1(q_1 p_1 + q_2 p_2) q_2 = p_1 q_2 + p_1 q_2$, 故 $p_1 q_2 = 0$, 同理有 $p_2 q_1 = 0$. 若 $f_1: D \to A$, $f_2: D \to B$ 是态射, 则 $h = q_1 f_1 + q_2 f_2: D \to C$ 满足

$p_1h = p_1(q_1f_1 + q_2f_2) = f_1$, $p_2h = p_2(q_1f_1 + q_2f_2) = f_2$. 如果 $h' : D \to C$ 也满足 $p_1h' = f_1$, $p_2h' = f_2$, 则 $h' = (q_1p_1 + q_2p_2)h' = q_1f_1 + q_2f_2 = h$, 因此 C 是 A 与 B 的积使得 p_1 与 p_2 成为射影.

(2)⇔(3) 对偶地可以证明. □

如果一个对象 C 既是对象 A 与 B 的积同时又是 A 与 B 的余积, 则称 C 是 A 与 B 的 **双积** (biproduct), 记作 $A \oplus B$.

如果准加法范畴 $\mathcal{C}$ 存在有限积 (或有限余积), 则 $\mathcal{C}$ 存在双积, 我们可以定义一个双函子 $\oplus : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 使得对任意的态射 $f_1 : A_1 \to B_1$, $f_2 : A_2 \to B_2$, $f_1 \oplus f_2 : A_1 \oplus A_2 \to B_1 \oplus B_2$ 为满足 $p'_i(f_1 \oplus f_2) = f_ip_i$, $i = 1, 2$ 的唯一态射 (这里 $p_i : A_1 \oplus A_2 \to A_i$, $p'_i : B_1 \oplus B_2 \to B_i$, $i = 1, 2$ 是射影), 即下面的方形交换:

$$\begin{array}{ccc} A_1 \oplus A_2 & \xrightarrow{f_1 \oplus f_2} & B_1 \oplus B_2 \\ {\scriptstyle p_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'_i} \\ A_i & \xrightarrow{\quad f_i \quad} & B_i \end{array}$$

等价地我们可以定义 $f_1 \oplus f_2 : A_1 \oplus A_2 \to B_1 \oplus B_2$ 为满足 $(f_1 \oplus f_2)q_i = q'_if_i$, $i = 1, 2$ 的唯一态射 (这里 $q_i : A_i \to A_1 \oplus A_2$, $q'_i : B_i \to B_1 \oplus B_2$, $i = 1, 2$ 是余射影), 即下面的方形交换:

$$\begin{array}{ccc} A_1 \oplus A_2 & \xrightarrow{f_1 \oplus f_2} & B_1 \oplus B_2 \\ {\scriptstyle q_i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle q'_i} \\ A_i & \xrightarrow{\quad f_i \quad} & B_i \end{array}$$

事实上, 上面两组方形的交换性是等价的. 例如, 若第一组方形交换, 则由引理 4.1.6 有 $(f_1 \oplus f_2)q_i = 1_{B_1 \oplus B_2}(f_1 \oplus f_2)q_i = (q'_1p'_1 + q'_2p'_2)(f_1 \oplus f_2)q_i = q'_1f_1p_1q_i + q'_2f_2p_2q_i = q'_if_i$, $i = 1, 2$, 即第二组方形交换, 反之亦然.

类似于将二元积推广到有限积的情形, 我们可以将双积推广到有限多个对象, 我们记 $A_1, \cdots, A_n$ 的双积为 $\bigoplus_{i=1}^n A_i$. 任意一个态射 $f : \bigoplus_{i=1}^n A_i \to \bigoplus_{j=1}^m B_j$ 都可以由态射族 $f_{ij} = p'_jfq_i : A_i \to B_j$, $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, m$ 完全确定 (这里 $p'_j : \bigoplus_{j=1}^m B_j \to B_j$, $j = 1, \cdots, m$ 是射影, $q_i : A_i \to \bigoplus_{i=1}^n A_i$, $i = 1, \cdots, n$ 是余射影), 因此我们可以将 f 等价地看作一个 $n \times m$ 矩阵 (f_{ij}), 这时双积之间的态射的复合就是通常的矩阵乘积.

定义 4.1.7 若准加法范畴 $\mathcal{C}$ 存在有限积和零对象, 则称 $\mathcal{C}$ 是一个 **加法范畴** (additive category).

命题 4.1.8 设 $f, f' : A \to B$ 是加法范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射, 则

$$f + f' = c'(f \oplus f')d$$

这里 $d: A \to A \oplus A$ 是满足 $p_1 d = p_2 d = 1_A$ 的唯一态射 (其中 $p_1, p_2 : A \oplus A \to A$ 是射影), 称为对角态射, $c' : B \oplus B \to B$ 是满足 $c'q_1' = c'q_2' = 1_B$ 的唯一态射 (其中 $q_1', q_2' : B \to B \oplus B$ 是余射影), 称为余对角态射.

证明　$c'(f \oplus f')d = c'(f \oplus f')(q_1 p_1 + q_2 p_2)d = c'(f \oplus f')q_1 + c'(f \oplus f')q_2 = c'q_1' f + c'q_2' f' = f + f'$. □

定义 4.1.9　设 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ 是准加法范畴. 若函子 $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 满足

$$T(f+g) = T(f) + T(g)$$

成立, 则称函子 T 是一个 **加法函子** (additive functor).

若 $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是加法函子, 则 $T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)$, 故 $T(0) = 0$.

命题 4.1.10　若 $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是函子, 其中 $\mathcal{D}$ 是准加法范畴而 $\mathcal{C}$ 是加法范畴. 则 T 是一个加法函子当且仅当 T 保持双积.

证明　若 T 是加法函子. 由引理 4.1.6, A 与 B 的双积 C 可表达为存在态射 $p_1 : C \to A$, $p_2 : C \to B$, $q_1 : A \to C$, $q_2 : B \to C$ 满足条件 $p_1 q_1 = 1_A$, $p_2 q_2 = 1_B$, $q_1 p_1 + q_2 p_2 = 1_C$, 只需用 T 作用以上关系式即可得 $T(C)$ 是 $T(A)$ 与 $T(B)$ 的双积.

反之, 若 T 保持双积. 对 $\mathcal{C}$ 中任意一对态射 $f, g : A \to B$, 有 $T(f \oplus g) = T(f) \oplus T(g)$ 并且 T 保持对角态射和余对角态射, 因此由命题 4.1.8 可知 $T(f+g) = T(c'(f \oplus g)d) = T(c')(T(f) \oplus T(g))T(d) = T(f) + T(g)$. □

例 4.1.11　设 $\mathcal{C}$ 是一个准加法范畴, 则态射函子 $\mathcal{C}(A, -) : \mathcal{C} \to \text{AbGp}$ 和反变态射函子 $\mathcal{C}(-, B) : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \text{AbGp}$ 都是加法函子.

练习 4.1

1. 设 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} D$ 和 $A \xrightarrow{g} C \xrightarrow{k} D$ 是准加法范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射. 证明复合态射

$$A \xrightarrow{\langle f,g \rangle} B \oplus C \xrightarrow{(h,k)} D$$

等于 $hf + kg$. 这里 $\langle f, g \rangle : A \to B \oplus C$ 是使得 $f = p_B \langle f, g \rangle$, $g = p_C \langle f, g \rangle$ 的唯一态射, 其中 $p_B : B \oplus C \to B$, $p_C : B \oplus C \to C$ 是射影; $(h, k) : B \oplus C \to D$ 是使得 $h = (h,k) q_B$, $k = (h,k) q_C$ 的唯一态射, 其中 $q_B : B \to B \oplus C$, $q_C : C \to B \oplus C$ 是余射影.

2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个加法范畴, $B, C \in \text{ob}\mathcal{C}$. 如果态射 $q : C \to B$ 存在核并且存在一个右逆, 即存在态射 $r : B \to C$ 使得 $qr = 1_B$, 证明存在一个对象 A 和一个态射 $h : A \to C$ 使得 $A \xrightarrow{h} C \xleftarrow{r} B$ 是 A 与 B 的余积.

3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个准加法范畴. 证明态射函子 $\mathcal{C}(A, -) : \mathcal{C} \to \text{AbGp}$ 和反变态射函子 $\mathcal{C}(-, B) : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \text{AbGp}$ 都是加法函子.

4. 设范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 都是加法范畴. 证明乘积范畴 $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 是一个加法范畴.

4.2 Abel 范畴

定义 4.2.1 若加法范畴 $\mathcal{C}$ 是有限完备和有限余完备的并且满足任意一个单态射都是某个态射的核, 任意一个满态射都是某个态射的余核, 则称 $\mathcal{C}$ 是一个**Abel 范畴**.

例 4.2.2 Abel 群范畴 AbGp 和 R 模范畴 Mod_R 都是 Abel 范畴.

例 4.2.3 若 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴, $\mathcal{D}$ 是 Abel 范畴, 则函子范畴 $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ 是一个 Abel 范畴. 事实上, 对任意两个函子 $F,G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 以及 $\alpha,\beta\in[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)$, 定义 $(\alpha+\beta)_A=\alpha_A+\beta_A:F(A)\to G(A)$, 则 $[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)$ 是一个 Abel 群. 类似地可以定义 F 与 G 的双积为 $(F\oplus G)(A)=F(A)\oplus G(A)$, $A\in\text{ob}\mathcal{C}$, α 的核 $K\to F$ 使得对每个 $A\in\text{ob}\mathcal{C}$, $(K(A)\to F(A))=\ker(F(A)\to G(A))$.

引理 4.2.4 设 $\mathcal{C}$ 是一个 Abel 范畴, 则:

(1) $\mathcal{C}$ 中的态射 f 是单态射当且仅当 $f=\ker(\text{coker}(f))$.

(2) $\mathcal{C}$ 中的态射 g 是满态射当且仅当 $g=\text{coker}(\ker(g))$.

证明 (1) 若 $f:A\to B$ 是单态射, 则存在态射 $g:B\to C$ 使得 $f=\ker(g)$. 另记 $r:B\to D$ 是 f 的余核, 则存在唯一的态射 $h:D\to C$ 使得 $g=hr$. 若 $f':A'\to B$ 满足 $rf'=0$, 则 $gf'=hrf'=0$, 由 $f=\ker(g)$ 知存在唯一的态射 $t:A'\to A$ 使得 $f'=ft$, 注意到 $rf=0$, 可得 $f=\ker(r)=\ker(\text{coker}(f))$.

(2) 对偶地可以证明. □

引理 4.2.5 设 $\mathcal{C}$ 是一个 Abel 范畴, 则:

(1) $\mathcal{C}$ 中的态射 f 是单态射当且仅当 $\ker(f)=0$.

(2) $\mathcal{C}$ 中的态射 g 是满态射当且仅当 $\text{coker}(g)=0$.

证明 (1) 若 f 是单态射, 则对任意的 $g:D\to A$, 由 $fg=0$ 可得 $g=0$, 从而 $\ker(f)=0$. 反之, 若 $\ker(f)=0$. 对任意一对平行态射 $r,s:C\to A$ 满足 $fr=fs$, 有 $f(r-s)=0$, 因此 $r-s$ 可以通过 $\ker(f)=0$ 唯一分解, 故 $r-s=0$, 从而 $r=s$.

(2) 对偶地可以证明. □

命题 4.2.6 设 $\mathcal{C}$ 是一个 Abel 范畴, 则 $\mathcal{C}$ 中任意态射 f 都可以唯一地分解为 $f=me$, 使得 m 是单态射而 e 是满态射. 进一步有 $m=\ker(\text{coker}(f))$, $e=\text{coker}(\ker(f))$.

证明 设 $c:B\to C$ 是 f 的余核, $m:D\to B$ 是 c 的核, 即 $m=\ker(\text{coker}(f))$, 则由 $cf=0$ 可得存在唯一态射 $e:A\to D$ 使得 $f=me$. 若 e 是满态射, 对于任意态射 $h:\cdot\to A$, 由 m 是单态射可知 $fh=0$ 当且仅当 $eh=0$, 故 $\ker(f)=\ker(e)$, 从而有 $e=\text{coker}(\ker(e))=\text{coker}(\ker(f))$. 因此欲证分解的存在性只需说明 e 是一个

满态射即可.

记 $r = \mathrm{coker}(e)$, $t = \ker(r)$, 则由 $re = 0$ 可得 e 存在通过 t 的唯一分解 $e = th$. 而 mt 是单态射, 故存在态射 $s : B \to S$ 使得 $mt = \ker(s)$. 这时 $sf = smth = 0$, 故存在唯一的态射 $q : C \to S$ 使得 $s = qc$, 因此 $sm = qcm = 0$. 但是 $\ker(s) = mt$, 从而可得 m 可通过 mt 唯一分解为 $m = mtl$, 这表明在 B 的子对象族 $\mathrm{Sub}(B)$ 中有 $(D, m) \leqslant (\cdot, mt)$, 但 $(\cdot, mt) \leqslant (D, m)$ 显然, 故 t 是一个同构. 因此 $r = 0$, 由引理 4.2.5 可知 e 是满态射.

欲证唯一性, 设 f 具有分解 $f = m'e'$ 使得 m' 是单态射并且 e' 是满态射. 则由 e' 是满态射可知 $hf = 0$ 当且仅当 $hm' = 0$, 因此 $\mathrm{coker}(f) = \mathrm{coker}(m')$, 从而有 $m' = \ker(\mathrm{coker}(m')) = \ker(\mathrm{coker}(f)) = m$. 对偶地可以证明 $e' = e$. □

由命题 4.2.6, 我们可以在 Abel 范畴中定义一个态射的像和余像如下：

定义 4.2.7　设 $f : A \to B$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射. 若 f 唯一地分解为 $f = me$ 使得 m 是单态射而 e 是满态射, 则称 m 是 f 的**像**, 记作 $m = \mathrm{im}(f)$, 称 e 是 f 的**余像**, 记作 $e = \mathrm{coim}(f)$.

引理 4.2.8　考虑 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中的方形：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

(1) 该方形交换当且仅当复合 $A \xrightarrow{\langle f,g\rangle} B\oplus C \xrightarrow{(-h,k)} D$ 是零态射. 这里 $\langle f,g\rangle : A \to B\oplus C$ 是使得 $f = p_B\langle f,g\rangle$, $g = p_C\langle f,g\rangle$ 的唯一态射, 其中 $p_B : B\oplus C \to B$, $p_C : B\oplus C \to C$ 是射影; $(-h,k) : B\oplus C \to D$ 是使得 $-h = (-h,k)q_B$, $k = (-h,k)q_C$ 的唯一态射, 其中 $q_B : B \to B\oplus C$, $q_C : C \to B\oplus C$ 是余射影.

(2) 该方形是一个拉回方形当且仅当 $\langle f,g\rangle = \ker(-h,k)$.

(3) 该方形是一个推出方形当且仅当 $(-h,k) = \mathrm{coker}(\langle f,g\rangle)$.

证明　(1) 事实上, $(-h,k)\langle f,g\rangle = (-h,k)(q_Bp_B + q_Cp_C)\langle f,g\rangle = (-h)f + kg = -hf + kg$, 因此 $(-h,k)\langle f,g\rangle = 0$ 当且仅当 $hf = kg$.

(2) 由 (1) 的证明可以看出, $\langle f,g\rangle = \ker(-h,k)$ 当且仅当 $(-h,k)\langle f,g\rangle = 0$, 并且若 $(-h,k)\langle f',g'\rangle = 0$, 则 $\langle f',g'\rangle$ 可通过 $\langle f,g\rangle$ 唯一地分解, 等价的说法是 f' 与 g' 可以分别通过 f 与 g 唯一地分解, 即方形是拉回方形.

(3) 对偶地可以证明. □

命题 4.2.9　设下面方形是 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个拉回方形,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

若 k 是满态射, 则 f 是满态射并且该方形是一个推出方形.

证明 利用引理 4.2.8 证明中的约定, 由于 $(-h,k)q_C = k$ 是满态射, $(-h,k)$ 是满态射. 因此 $(-h,k) = \mathrm{coker}(\ker(-h,k)) = \mathrm{coker}(\langle f,g\rangle)$, 由引理 4.2.8 知该方形是一个推出方形.

设 $q: B \to Q$ 是 f 的余核, 则有 $qf = 0g$. 由推出方形的万有性质存在唯一的态射 $r: D \to Q$ 使得 $0 = rk$, $q = rh$, 但是 k 是满态射, 故 $r = 0$, 因此 $q = rh = 0$, 由引理 4.2.5 知 f 是满态射. □

练习 4.2

1. 证明所有的有限 Abel 群作为 Abel 群范畴的满子范畴是一个 Abel 范畴.

2. 证明在无扭 Abel 群 (torsion-free abelian group) 范畴中, 单态射不必是某个态射的核并且满态射不必是某个态射的余核, 从而得出无扭 Abel 群范畴不是一个 Abel 范畴.

3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个加法范畴, $\mathcal{C}$ 中每个态射都存在核和余核, 并且任意一个满态射都是某个态射的余核, 但是并非所有的单态射都是某个态射的核. 证明在 $\mathcal{C}$ 中正则单态射的复合不必是正则单态射.

4.3 正合序列

定义 4.3.1 设

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-2} \cdots$$

是 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个态射序列.

(1) 如果 $\mathrm{im}(f_{n+1}) = \ker(f_n)$, 我们称该序列在 A_n 处**正合**(exact). 如果该序列在每个 A_n 处正合, 则称该序列是一个 **正合序列** (exact sequence).

(2) 如果对每个 n 都有 $f_n f_{n+1} = 0$, 则称该序列是一个 **连通序列**(connected sequence).

若序列在 A_n 处是正合的, 则由命题 4.2.6 有 $f_n f_{n+1} = f_n \ker(\mathrm{coker}(f_{n+1}))\mathrm{coker}(\ker(f_{n+1})) = f_n \ker(f_n)\mathrm{coker}(\ker(f_{n+1})) = 0$, 因此正合的序列是连通的. 但是反之则不成立, 事实上只要考虑 Abel 群范畴 AbGp 中的情形即可.

考虑短序列:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \tag{$*$}$$

注意到若 $\ker(f) = 0$, 则 $\mathrm{coim}(f) = \mathrm{coker}(\ker(f)) = \mathrm{coker}(0) = 1_A$, 故 $f = \mathrm{im}(f)$. 结合引理 4.2.5 可知该短序列是正合的当且仅当 $f = \ker(g)$.

对偶地对于短序列:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \tag{$**$}$$

我们可以验证该序列是正合的当且仅当 $g = \text{coker}(f)$.

定义 4.3.2 设 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ 是 Abel 范畴, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是加法函子.

(1) 若 T 保持正合序列, 即给定 $\mathcal{C}$ 中的一个正合序列

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-2} \cdots$$

则

$$\cdots \xrightarrow{T(f_{n+1})} T(A_n) \xrightarrow{T(f_n)} T(A_{n-1}) \xrightarrow{T(f_{n-1})} T(A_{n-2}) \cdots$$

是 $\mathcal{D}$ 中的一个正合序列, 则称 T 是一个 **正合函子** (exact functor).

(2) 若 T 保持 $(*)$ 型正合序列, 则称 T 是一个 **左正合函子** (left exact functor); 若 T 保持 $(**)$ 型正合序列, 则称 T 是一个 **右正合函子**(right exact functor).

容易看出加法函子 T 是一个左正合函子当且仅当 T 保持核, 即对 $\mathcal{C}$ 中任意态射 f 有 $T(\ker(f)) = \ker(T(f))$, 当且仅当 T 保持有限极限. 而 T 是一个右正合函子当且仅当 T 保持余核, 当且仅当 T 保持有限余极限. 进一步我们有下面命题.

命题 4.3.3 设 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ 是 Abel 范畴, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是加法函子. 下列条件等价:

(1) T 是一个正合函子.

(2) T 保持如下形式的正合序列:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0.$$

(3) T 保持核和余核.

(4) T 保持有限极限和有限余极限.

(5) T 是左正合的同时是右正合的.

引理 4.3.4 考虑 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中的图表:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\
\downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_2} & & \downarrow{\scriptstyle h_3} & & \downarrow{\scriptstyle h_4} & & \downarrow{\scriptstyle h_5} \\
B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5
\end{array}$$

若该图表是交换的并且上下两个横行都是正合的, 则:

(1) 如果 h_2, h_4 是单态射, h_1 是满态射, 则 h_3 是单态射.

(2) 如果 h_2, h_4 是满态射, h_5 是单态射, 则 h_3 是满态射.

(3) 如果 h_1, h_2, h_4, h_5 均是同构, 则 h_3 是同构.

证明 由于 (1) 和 (2) 是对偶的而 (3) 可以由 (1) 和 (2) 推出, 因此欲证该命题成立只需证明 (1) 成立即可.

设 $k: K \to A_3$ 是 h_3 的核, 由于 $h_4 f_3 k = g_3 h_3 k = 0$, 而 h_4 是单态射, 故 $f_3 k = 0$, 因此 k 可以通过 $\ker(f_3) = \operatorname{im}(f_2)$ 唯一分解. 我们首先在 $\mathcal{C}$ 中形成一个拉回方形如下:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\ r\ } & K \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & \swarrow & \big\downarrow{\scriptstyle k} \\ & \cdot & \\ & \nearrow \qquad \searrow & \\ A_2 & \xrightarrow{\ f_2\ } & A_3 \end{array}$$

则容易验证左上角的方形仍然是一个拉回方形, 由命题 4.2.9 可知 r 是满态射. 由于 $g_2 h_2 p = h_3 f_2 p = h_3 k r = 0$, 我们可以知道 $h_2 p$ 可通过 $\ker(g_2) = \operatorname{im}(g_1)$ 唯一分解, 同样形成一个拉回方形如下:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\ s\ } & \cdot \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h_2 p} \\ B_1 & \xrightarrow{\ g_1\ } & B_2 \end{array}$$

类似于前面的论述可得 s 是满态射. 进一步我们形成下面拉回方形:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\ g\ } & \cdot \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ A_1 & \xrightarrow{\ h_1\ } & B_1 \end{array}$$

由于 h_1 是满态射可得 g 是满态射. 这时 $h_2 psg = g_1 fg = g_1 h_1 h = h_2 f_1 h$, 由于 h_2 是单态射可得 $psg = f_1 h$, 注意到 A_2 处的正合性我们有 $krsg = f_2 psg = f_2 f_1 h = 0$, 故由 g, r, s 都是满态射可得 $k = 0$, 因此由引理 4.2.5 可得 h_3 是单态射. □

如果我们考虑的 Abel 范畴就是 Abel 群范畴, 这时候每个对象都是一个 Abel 群, 因此我们可以利用 Abel 群中的元素来描述许多重要的性质. 例如, 同态 $f: A \to B$ 是单射当且仅当对任意的 $a \in A, f(a) = 0 \Rightarrow a = 0$, 而 f 是满射当且仅当对任意 $b \in B$ 存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$, 等等. 受到这种思想的启发, 我们在任意一个 Abel 范畴中引入一种广义的"元素"—— 伪元素, 我们来说明伪元素在许多方面类似于 Abel 群中的元素的作用.

定义 4.3.5 设 $\mathcal{C}$ 是一个 Abel 范畴, $f: A \to B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射.

(1) 任意一个以 A 为值域的态射 $a: \cdot \to A$ 称为对象 A 的一个 **伪元素** (pseudo-element), 记作 $a \in^* A$.

(2) 设 $a: C \to A, a': C' \to A$ 是 A 的两个伪元素, 若存在两个满态射 $p: D \to C, p': D \to C'$ 使得 $ap = a'p'$, 则称 a 与 a' 伪相等, 记作 $a =^* a'$.

(3) 我们称复合 fa 为 A 的伪元素 $a: \cdot \to A$ 在态射 f 下的像, 记作 $f(a)$.

由上面的定义容易看出对象 A 的伪元素之间的伪相等关系 $=^*$ 满足自反性和对称性. 若 $a, a', a'' \in^* A$ 满足 $a =^* a', a' =^* a''$, 则存在满态射 p, p', p'', p''' 使得

$ap = a'p'$, $a'p'' = a''p'''$. 考虑由 p', p'' 两个态射形成的拉回方形, 由命题 4.2.9, p' 与 p'' 的拉回 q' 与 q 都是满态射, 因此我们有满态射 pq 和 $p'''q'$ 使得 $a(pq) = a'(p'q) = a'(p''q') = a''(p'''q')$, 因此 $=^*$ 是一个等价关系.

如果 $f: B \to A$ 与零态射 $0: C \to A$ 满足 $f =^* 0$, 则存在满态射 p, q 使得 $fp = 0q = 0$, 由于 p 是满态射我们有 $f = 0$. 反之注意到任意对象到零对象 Z 的唯一态射都是满态射, 故任意一个零态射 $0: \cdot \to A$ 都与零态射 $Z \to A$ 伪相等, 从而由传递性可知 A 的任意两个伪零元素是伪相等的, 这表明 A 的所有伪零元素在伪相等关系下形成一个等价类.

引理 4.3.6 在 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中下列命题成立:

(1) $f: A \to B$ 是一个零态射当且仅当任意的 $a \in^* A, f(a) =^* 0$.

(2) $f: A \to B$ 是一个单态射当且仅当任意的 $a \in^* A, f(a) =^* 0 \Rightarrow a =^* 0$, 当且仅当任意的 $a, a' \in^* A, f(a) =^* f(a') \Rightarrow a =^* a'$.

(3) $f: A \to B$ 是一个满态射当且仅当任意的 $b \in^* B$, 存在 $a \in^* A, f(a) =^* b$.

(4) 序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 是正合的当且仅当任意的 $a \in^* A, g(f(a)) =^* 0$, 并且若 $g(b) =^* 0$, 则存在 $a \in^* A$ 使得 $f(a) =^* b$.

证明 (1) 若 $f: A \to B$ 是零态射, 则对任意的 $a \in^* A$ 有 $f(a) = 0$, 故 $f(a) =^* 0$. 反之, 取 $a = 1_A$, 则 $f = f(1_A) =^* 0$, 故 $f = 0$.

(2) 若 f 是单态射, $a, a' \in^* A, f(a) =^* f(a')$, 则存在满态射 p, p' 使得 $f(a)p = f(a')p'$, 故有 $ap = a'p'$, 因此 $a =^* a'$.

反之, 如果对任意的 $a, a' \in^* A, f(a) =^* f(a') \Rightarrow a =^* a'$, 若取 $a' = 0$, 则有对任意的 $a \in^* A, f(a) =^* 0 \Rightarrow a =^* 0$, 故 $\ker(f) = 0$, f 是单态射.

(3) 若 f 是满态射, $b \in^* B$. 考虑由 f 和 b 形成的拉回方形, 由命题 4.2.9 可知 f 的拉回 g 是满态射. 设 a 是 b 的拉回, 则有 $f(a) =^* b$.

反之, 对 $1_B \in^* B$, 存在 $a \in^* A$ 使得 $f(a) =^* 1_B$, 即存在满态射 p, q 使得 $fap = 1_B q = q$, 因此 f 是满态射.

(4) 若序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 是正合的, 设 $a \in^* A$. 则 $g(f(a)) = (gf)(a) = 0$, 故 $g(f(a)) =^* 0$. 另一方面, 如果 $g(b) =^* 0$, 考虑 f 的分解 $A \xrightarrow{e} I \xrightarrow{m} B$, 其中 e 是满态射而 m 是单态射. 由命题 4.2.6 和正合性可得 $m = \ker(g)$, 故 b 可通过 m 唯一地分解为 $b = mk$, 设 a 是 k 沿着 e 的拉回, q 是 e 沿着 k 的拉回, 则 q 是满态射并且 $f(a) = mea = mkq = bq$, 故 $f(a) =^* b$.

反之, 如果条件成立. 同样考虑 f 的分解 $A \xrightarrow{e} I \xrightarrow{m} B$, 其中 e 是满态射而 m 是单态射, 我们只需证明 $m = \ker(g)$ 即可. 由条件中的第一部分我们有 $gme = gf = gf(1_A) = g(f(1_A)) = 0$, 而 e 是满态射, 故有 $gm = 0$. 若 $b: D \to B$ 使得 $gb = 0$, 由题设条件存在 $a \in^* A$ 使得 $f(a) =^* b$, 因此存在满态射 p, q 使得 $f(a)p = bq$. 考虑由 m 和 b 形成的拉回方形. 设 t 是 m 沿着 b 的拉回, s 是 b 沿着

m 的拉回, 由于 $m(eap) = f(a)p = bq$, 故存在唯一的态射 r 使得 $q = tr$, $eap = sr$, 而 q 是满态射, 故 t 是满态射. 另一方面 t 是单态射, m 的拉回是一个单态射, 因此 t 是一个同构, 从而 b 可以通过 m 分解为 $b = mst^{-1}$. 由于 m 是单态射, 因此 b 通过 m 的分解是唯一的. □

下面我们利用伪元素的工具来证明一个较弱的"蛇型"引理 (由于引理的证明需要像蛇一样在方形的边缘弯曲盘行而得名).

引理 4.3.7 在 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中考虑下面图表:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle u_1} & & \downarrow{\scriptstyle u_2} & & \downarrow{\scriptstyle u_3} & & \\
0 & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle v_1} & & \downarrow{\scriptstyle v_2} & & \downarrow{\scriptstyle v_3} & & \\
0 & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{h_1} & C_2 & \xrightarrow{h_2} & C_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle w_1} & & \downarrow{\scriptstyle w_2} & & \downarrow{\scriptstyle w_3} & & \\
 & & D_1 & \xrightarrow{k_1} & D_2 & \xrightarrow{k_2} & D_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

若该图表中所有的行和列都是正合的并且所有的方形都是交换的, 则存在态射 $s : A_3 \to D_1$ 使得序列

$$0 \to A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{s} D_1 \xrightarrow{k_1} D_2 \xrightarrow{k_2} D_3 \to 0$$

正合.

证明 欲构造满足命题条件的 s, 我们首先来形成下面的交换图表:

$$\begin{array}{ccccc}
K & \xrightarrow{e} & P & \xrightarrow{p} & A_3 \\
\downarrow{\scriptstyle r} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle u_3} \\
B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 \\
\downarrow{\scriptstyle v_1} & & \downarrow{\scriptstyle v_2} & & \downarrow{\scriptstyle v_3} \\
C_1 & \xrightarrow{h_1} & C_2 & \xrightarrow{h_2} & C_3 \\
\downarrow{\scriptstyle w_1} & & \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle m} \\
D_1 & \xrightarrow{n} & Y & \xrightarrow{d} & Z
\end{array}$$

其中右上角的方形是一个拉回方形, 而左下角的方形是一个推出方形, 并且 $e: K \to P$ 是 p 的核, $d: Y \to Z$ 是 n 的余核. 由于 $g_2qe = u_3pe = 0$, 因此 qe 可通过 g_2 的核唯一分解, 但由序列 $0 \to B_1 \xrightarrow{g_1} B_2 \xrightarrow{g_2} B_3 \to 0$ 的正合性可知 $\ker(g_2) = g_1$, 因此存在唯一的态射 $r: K \to B_1$ 使得 $qe = g_1r$, 对偶地可证存在唯一的态射 $m: C_3 \to Z$ 使得 $dt = mh_2$. 因此该图表中所有的方形均交换. 另外由 $B_2 \xrightarrow{g_2} B_3 \to 0$ 的正合性可知 g_2 是满态射, 因此由命题 4.2.9 知 p 是满态射, 故 $p = \mathrm{coker}(\ker(p)) = \mathrm{coker}(e)$. 对偶地有 $n = \ker(d)$.

注意到 $B_1 \xrightarrow{v_1} C_1 \xrightarrow{w_1} D_1$ 的正合性, 可得 $tv_2qe = tv_2g_1r = th_1v_1r = nw_1v_1r = 0$, 由于 $p = \mathrm{coker}(e)$, 存在唯一的态射 $j: A_3 \to Y$ 使得 $tv_2q = jp$. 进一步由 $A_3 \xrightarrow{u_3} B_3 \xrightarrow{v_3} C_3$ 的正合性有 $djp = dtv_2q = mv_3u_3p = 0$, 而 p 是满态射, 故有 $dj = 0$, 从而由 $n = \ker(d)$ 可知存在唯一的态射 $s: A_3 \to D_1$ 使得 $j = ns$. 为了说明 s 就是满足命题条件的 s, 我们来看 s 在伪元素上的作用.

设 $a \in^* A_3$, 则 $u_3(a) \in^* B_3$, 由于 g_2 是满态射, 存在 $b \in^* B_2$ 使得 $g_2(b) =^* u_3(a)$. 这时 $(h_2v_2)(b) =^* (v_3g_2)(b) =^* (v_3u_3)(a) =^* 0$, 由引理 4.3.6 知存在 $c \in^* C_1$ 使得 $h_1(c) =^* v_2(b)$. 我们来说明 $w_1(c) =^* s(a)$.

由关系式 $g_2(b) =^* u_3(a)$ 及引理 4.3.6 知存在 $a' \in^* P$ 使得 $p(a') =^* a, q(a') =^* b$, 这时我们有 $ns(a) =^* j(a) =^* (jp)(a') =^* (tv_2q)(a') =^* (tv_2)(b) =^* (th_1)(c) =^* (nw_1)(c)$, 但 n 是单态射, 故有 $s(a) =^* w_1(c)$.

现在我们把目光转向命题中欲证的正合性. 设 $\hat{a} \in^* A_2$, 记 $a =^* f_2(\hat{a}), b =^* u_2(\hat{a})$. 则按照上面的论述我们有 $g_2(b) =^* (g_2\mu_2)(\hat{a}) =^* (u_3f_2)(\hat{a}) =^* u_3(a)$, 因此存在 $c \in^* C_1$ 使得 $h_1(c) =^* v_2(b) =^* (v_2u_2)(\hat{a}) =^* 0$, 但是 h_1 是单态射, 故 $c =^* 0$, 从而 $s(a) =^* w_1(c) =^* 0$.

设 $a \in^* A_3$ 使得 $s(a) =^* 0$, 如前面的论述取 $b \in^* B_2, c \in^* C_1$ 满足 $g_2(b) =^* u_3(a), h_1(c) =^* v_2(b)$. 这时有 $w_1(c) =^* s(a) =^* 0$, 故存在 $b' \in^* B_1$ 使得 $v_1(b') =^* c$. 由于 $(v_2g_1)(b') =^* (h_1v_1)(b') =^* h_1(c) =^* v_2(b)$, 我们有 $b - g_1(b') \in^* B_2$ 使得 $v_2(b - g_1(b')) =^* 0$, 故存在 $a' \in^* A_2$ 使得 $u_2(a') =^* b - g_1(b')$. 进一步我们有 $(u_3f_2)(a') =^* (g_2u_2)(a') =^* g_2(b - g_1(b')) =^* g_2(b) - (g_2g_1)(b') =^* g_2(b) =^* u_3(a)$, 但是由正合性可知 u_3 是单态射, 因此有 $f_2(a') =^* a$. 这样我们就证明了序列 $A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{s} D_1$ 的正合性. 下面我们来证明序列 $A_3 \xrightarrow{s} D_1 \xrightarrow{k_1} D_2$ 的正合性即可完成命题的证明.

取 $a \in^* A_3$, 如前面的论述可取得 $c \in^* C_1$ 满足 $h_1(c) =^* v_2(b)$, 这时我们有 $k_1s(a) =^* (k_1w_1)(c) =^* (w_2h_1)(c) =^* (w_2v_2)(b) =^* 0$.

最后设 $d' \in^* D_1$ 使得 $k_1(d') =^* 0$. 由于 w_1 是满态射, 存在 $c' \in^* C_1$ 使得 $w_1(c') =^* d'$, 这时 $(w_2h_1)(c') =^* (k_1w_1)(c') =^* k_1(d') =^* 0$, 因此存在 $b \in^* B_2$ 使得 $v_2(b) =^* h_1(c')$. 进一步由 $(v_3g_2)(b) =^* (h_2v_2)(b) =^* (h_2h_1)(c') =^* 0$, 存在

$a \in^* A_3$ 使得 $u_3(a) =^* g_2(b)$. 回忆前面关于 s 对伪元素的作用的论述, 我们可以看出 $s(a) =^* w_1(c') =^* d'$. □

练习 4.3

1. 在 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中, 设 $f = gh$. 证明存在一个正合序列

$$0 \to \ker(h) \to \ker(f) \to \ker(g) \to \cdots \to \operatorname{coker}(h) \to \operatorname{coker}(f) \to \operatorname{coker}(g) \to 0.$$

2. 试利用引理 4.3.7, 证明“蛇型”引理. 在 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中考虑下面的交换图表:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle u_1} & & \downarrow{\scriptstyle u_2} & & \downarrow{\scriptstyle u_3} & & \\
 & & B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle v_1} & & \downarrow{\scriptstyle v_2} & & \downarrow{\scriptstyle v_3} & & \\
0 & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{h_1} & C_2 & \xrightarrow{h_2} & C_3 & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle w_1} & & \downarrow{\scriptstyle w_2} & & \downarrow{\scriptstyle w_3} & & \\
 & & D_1 & \xrightarrow{k_1} & D_2 & \xrightarrow{k_2} & D_3 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

若该图表中的三列和中间的两行都是正合的, 则存在态射 $s : A_3 \to D_1$ 使得序列

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{s} D_1 \xrightarrow{k_1} D_2 \xrightarrow{k_2} D_3$$

正合.



第5章 层范畴

范畴论在现代数学中的应用有两个非常成功的范例，一个是在代数拓扑学中的应用，另外一个是在代数几何中的应用. 范畴论在代数几何中的应用是通过引入一个新的工具 —— 层论来实现的，另一方面层论也是集合论与代数几何的共同推广 ——Topos 理论的基础. 本章我们来介绍层论的一些基本内容和基本思想.

5.1 层的定义

层的概念来自于对拓扑空间上的某一类具有很好性质的函数的观测，如连续实值函数或可导函数. 拓扑空间 X 上的任意一个连续实值函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 在 X 的一个开子集 U 上的限制 $f|_U: U \to \mathbb{R}$ 仍然是 U 上的一个连续实值函数. 反之给定 X 的一个开覆盖 $\{U_i \mid i \in I\}$，如果每个 U_i 上都定义了一个连续实值函数 $f_i: U_i \to \mathbb{R}$，并且这些函数在公共的部分是“相符合的”，即对任意两个 f_i, f_j 都有 $f_i(x) = f_j(x)$ 对所有的 $x \in U_i \cap U_j$ 成立，则连续函数族 $\{f_i \mid i \in I\}$ 可以“并接”为 X 上的一个连续函数，即存在唯一的连续函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 使得 f 在每个 U_i 上的限制 $f|_{U_i} = f_i$. 这表明了拓扑空间 X 上的连续实值函数可以“局部”地确定. 如果对 X 中的每个开集 U 我们记 $C(U) = \{f \mid f: U \to \mathbb{R}\text{是连续映射}\}$，若 $V \subseteq U$，存在一个限制映射

$$C(V \subseteq U): C(U) \to C(V)$$

使得任意的 $f \in C(U)$，$C(V \subseteq U)(f) = f|_V$.

将 X 的拓扑 $\Gamma(X)$ 看作一个偏序集 (从而可以看作一个范畴)，则 C 定义了一个反变函子 $C: \Gamma(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$. 另外给定 U 的一个开覆盖 $U = \bigcup U_i$，记

$$e: C(U) \to \prod_i C(U_i),\ f \mapsto (f|_{U_i}),$$

$$p: \prod_i C(U_i) \to \prod_{i,j} C(U_i \cap U_j),\ (f_i) \mapsto (f_i|_{U_i \cap U_j}),$$

$$q: \prod_i C(U_i) \to \prod_{i,j} C(U_i \cap U_j),\ (f_i) \mapsto (f_j|_{U_i \cap U_j}),$$

则条件：

任意一族在公共部分“相符合的”的连续实值函数 $\{f_i: U_i \to \mathbb{R}\}$ 都能够“并接”为 U 上的一个连续实值函数.

等价于条件：

$e: C(U) \to \prod_i C(U_i)$ 是平行对映射 $p, q: \prod_i C(U_i) \to \prod_{i,j} C(U_i \cap U_j)$ 的等值子.

拓扑空间上许多类似地可以“局部”确定的结构导致下面的层的定义.

定义 5.1.1 设 X 是一个拓扑空间：

(1) 若 $F: \Gamma(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ 是一个反变函子, 我们称之为 X 上的一个 **准层** (presheaf).

(2) 如果 X 上的准层 F 满足对任意的 $U \in \Gamma(X)$ 以及 U 的任意开覆盖 $\{U_i \mid i \in I\}$, $e: F(U) \to \prod_i F(U_i)$ 是平行对映射

$$p, q: \prod_i F(U_i) \to \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

的等值子, 则称 F 是空间 X 上的一个 **层** (sheaf). 这里 $e: t \mapsto (F(U_i \subseteq U)(t))$, $p: (t_i) \mapsto (F(U_i \cap U_j \subseteq U_i)(t_i))$, $q: (t_i) \mapsto (F(U_i \cap U_j) \subseteq U_j)(t_j))$.

上面的定义可以方便地解释为拓扑空间 X 上的一个层就是对 X 中的每个开集 U 指定一个集合 $F(U)$ 满足下面两个条件：

(1)* 若 $V \subseteq U$, 则存在一个“限制”映射 $F(V \subseteq U): F(U) \to F(V)$.

(2)* 给定开集 U 的一个开覆盖 $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ 以及一族元素 $\{t_i \in F(U_i) \mid i \in I\}$, 满足 $F(U_i \cap U_j \subseteq U_i)(t_i) = F(U_i \cap U_j \subseteq U_j)(t_j)$, 则存在唯一的 $t \in F(U)$ 使得 $F(U_i \subseteq U)(t) = t_i$.

为了方便, 对任意的开集包含 $V \subseteq U$ 及 $t \in F(U)$, 我们今后记 $t|_V = F(V \subseteq U)(t)$, 称为 t 在 V 上的限制.

例 5.1.2 设 X 是一个拓扑空间. 令 $D: \Gamma(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$, $D(U) = \{f: X \to \mathbb{R}$是可导函数$\}$, 对任意的开集包含 $V \subseteq U$, “限制”映射 $D(V \subseteq U): D(U) \to D(V)$ 为通常的函数限制, 则 D 是 X 上的一个层. 但是准层 $B: \Gamma(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$, $B(U) = \{f: X \to \mathbb{R}$是有界连续函数$\}$ 不是一个层.

例 5.1.3 设 X 是一个拓扑空间, U 是 X 中的一个开集. 则反变态射函子

$$\Gamma(X)(-, U): \Gamma(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set},\ V \mapsto \begin{cases} \{*\}, & V \subseteq U \\ \emptyset, & V \not\subseteq U \end{cases}$$

是 X 上的一个层, 这里 $\{*\}$ 是单点集. 特别地层 $\Gamma(X)(-, X): \Gamma(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ 使得任意开集 U, $\Gamma(X)(-, X)(U) = \{*\}$ 是单点集, 我们在后面可以看出这个层实际上是 X 上的层范畴中的终对象.

例 5.1.4 设 X 是一个拓扑空间. 令 $G: \Gamma(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$, $G(U) = \{V \in \Gamma(X) \mid V \subseteq U\}$, 对任意的开集包含 $V \subseteq U$, “限制”映射 $G(V \subseteq U): G(U) \to G(V)$ 为 $U' \mapsto U' \cap V$, 则容易验证 G 是 X 上的一个层.

对于拓扑空间 X 上的任意两个层 F 和 G, F 与 G 之间的一个态射是指一个自然变换 $\alpha: F \to G$, 则我们可以形成函子范畴 $[\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ 的满子范畴 $\mathrm{Sh}(X)$, 其对象为空间 X 上的所有的层. 容易看出例 5.1.3 中的常值层 $\Gamma(X)(-, X)$ 是层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的终对象.

引理 5.1.5 设 $D: \mathcal{J} \to \mathrm{Sh}(X)$ 是层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 上的一个 $\mathcal{J}$ 型图, $\{\alpha_j : F \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 D 的极限, 则对任意的 $U \in \Gamma(X)$, $\{\alpha_j(U) : F(U) \to D(j)(U) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是函子 $D_U : \mathcal{J} \to \mathrm{Set}$, $D_U(j) = D(j)(U)$ 的极限.

证明 设 $U \in \Gamma(X)$. 由于 $\{\alpha_j : F \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 D 的极限, 故 $\{\alpha_j(U) : F(U) \to D(j)(U) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是函子 D_U 上的一个锥形. 设 $\{\beta_j(U) : A \to D(j)(U) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是函子 D_U 上的任意一个锥形, 令

$$G : \Gamma(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set},\ V \mapsto \begin{cases} A, & V \subseteq U \\ \emptyset, & V \not\subseteq U \end{cases}$$

容易看出 G 是 X 上的一个层. 对任意的 $V \in \Gamma(X)$, $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$, 若 $V \subseteq U$, 令 $\beta_j(V) = D(j)(V \subseteq U)\beta_j(U) : G(V) = A \to D(j)(V)$, 若 $V \not\subseteq U$, 则 $\beta_j(V) : G(V) = \emptyset \to D(j)(V)$ 是空映射, 则容易验证对任意的 $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$, $\beta_j : G \to D(j)$ 是自然变换, 并且 $\{\beta_j : G \to D(j) \mid j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}\}$ 是 D 上的一个锥形, 因此存在唯一的态射 $\gamma : G \to F$ 使得 $\beta_j(V) = \alpha_j(V)\gamma(V)$ 对任意的 $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$ 和 $V \in \Gamma(X)$ 成立, 特别地映射 $\gamma(U) : A = G(U) \to F(U)$ 满足 $\beta_j(U) = \alpha_j(U)\gamma(U)$ 对任意的 $j \in \mathrm{ob}\mathcal{J}$ 成立, 并且这样的映射是唯一的. □

上面引理表明了层范畴中的极限是由每个开集对应图表的极限确定, 即所谓的"逐点计算的".

设 G, F 是空间 X 上的层. 如果对任意的 $U \in \Gamma(X)$, $G(U) \subseteq F(U)$, 并且若 $V \subseteq U$, 则 $G(V \subseteq U) = F(V \subseteq U)|_{G(U)} : G(U) \to G(V)$, 则称 G 是 F 的一个**子层**(subsheaf).

推论 5.1.6 设 G, F 是空间 X 上的层, 则 G 是 F 在层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的子对象当且仅当 G 是 F 的子层.

证明 如果 G 是 F 的子层, 则明显的包含 $\alpha : G \to F$ 使得对任意的 $U \in \Gamma(X)$, $\alpha_U : G(U) \to F(U)$ 是一个包含映射, 并且由"计算的逐点性"可知 α 是层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的单态射.

反之若 G 是 F 在层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的子对象, 则存在 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的单态射 $\varepsilon : G \to F$. 但是 $\varepsilon : G \to F$ 是单态射当且仅当下面的方形是层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的一个

拉回方形：

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{1_G} & G \\ {\scriptstyle 1_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\ G & \xrightarrow{\varepsilon} & F \end{array}$$

由引理 5.1.5 可知这时对任意 $U \in \Gamma(X)$, 下面方形是集合范畴 Set 中的一个拉回方形：

$$\begin{array}{ccc} G(U) & \xrightarrow{1_{G(U)}} & G(U) \\ {\scriptstyle 1_{G(U)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_U} \\ G(U) & \xrightarrow{\varepsilon_U} & F(U) \end{array}$$

因此每个 $\varepsilon_U : G(U) \to F(U)$ 都是一个包含, 同时由 ε 的自然性可知对任意的开集包含 $V \subseteq U$ 都有 $G(V \subseteq U) = F(V \subseteq U)|_{G(U)} : G(U) \to G(V)$, 故 G 是 F 的子层. □

由于一个层的子层的全体显然是一个集合, 因此我们立即有下面推论.

推论 5.1.7 层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 是一个良幂范畴.

下面我们介绍一个令人感兴趣的结果, 该结果表明空间 X 上的拓扑可以反过来由 X 上的层范畴得到, 因此层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 完全确定了空间 X 的拓扑.

命题 5.1.8 设 X 是拓扑空间, 记 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{Sh}(X)}(1)$ 是常值层 $1 = \Gamma(X)(-, X)$ 在范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的子对象偏续集, 则

$$\Gamma(X) \cong \mathrm{Sub}_{\mathrm{Sh}(X)}(1)$$

证明 对任意的 $W \in \Gamma(X)$, 定义一个层 S_W 如下：

$$S_W : \Gamma(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set},\ U \mapsto \begin{cases} \{*\}, & U \subseteq W \\ \emptyset, & U \not\subseteq W \end{cases}$$

显然 S_W 是 1 的子层.

反之若 S 是 1 的子层, 则对任意开集 U, $S(U) = \{*\}$ 或者 $S(U) = \emptyset$. 由于 S 是函子, 因此若 $V \subseteq U$ 并且 $S(U) = \{*\}$, 则 $S(V) = \{*\}$, 另外如果 $U = \bigcup U_i$ 并且对所有的 i, $S(U_i) = \{*\}$, 则由层的定义可知 $S(U) = \{*\}$. 因此若令 $W = \bigcup\{U \in \Gamma(X) \mid S(U) = \{*\}\}$, 则容易看出对任意开集 U, $S(U) = \{*\}$ 当且仅当 $U \subseteq W$. 这表明对应 $W \mapsto S_W$ 是一一到上的, 明显地该对应及其逆是保序的, 因此是一个同构. □

练习 5.1

1. 设 X 是拓扑空间. 证明在层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中, 满态射的拉回仍然是满态射.

2. 设 X 是拓扑空间, $P:\Gamma(X)^{\mathrm{op}}\to \mathrm{Set}$ 是一个准层. 如果将开集 $U\in\Gamma(X)$ 的任意一个开覆盖 $\{V_i\mid i\in I\}$ 看作 $\Gamma(X)$ 的一个子范畴, $\{P(V_i\subseteq V_j):P(V_j)\to P(V_i)\mid V_i\subseteq V_j,i,j\in I\}$ 看作范畴 Set 中的一个图. 证明 P 是一个层当且仅当对 X 中任意一个开集 U 以及 U 的任意一个开覆盖 $\{V_i\mid i\in I\}$, 图 $\{P(V_i\subseteq V_j):P(V_j)\to P(V_i)\mid V_i\subseteq V_j,i,j\in I\}$ 的极限是 $\{P(V_i\subseteq U):P(U)\to P(V_i)\mid i\in I\}$.

3. 设 X 是拓扑空间, $\mathcal{B}\subseteq\Gamma(X)$ 是 X 的一个基. 我们定义 $\mathcal{B}$ 上的一个准层就是一个反变函子 $F:\mathcal{B}^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Set}$. 类似于定义 5.1.1, 如果准层 F 满足对任意的 $U\in\mathcal{B}$ 以及 U 的任意一个由 $\mathcal{B}$ 中的开集构成的开覆盖 $\{U_i\mid i\in I\}$, $e:F(U)\to\prod_i F(U_i)$ 是平行对映射 $p,q:\prod_i F(U_i)\to\prod_{i,j}F(U_i\cap U_j)$ 的等值子, 则称 F 是 $\mathcal{B}$ 上的一个层. 定义两个层之间的态射为自然变换, 则我们同样可以得到 $\mathcal{B}$ 上的层范畴 $\mathrm{Sh}(\mathcal{B})$. 试证明范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 等价于范畴 $\mathrm{Sh}(\mathcal{B})$.

5.2 局部同胚映射

本节我们来讨论层的一种等价的表达形式, 我们将证明给定拓扑空间 X 上一个层等价于给定一个局部同胚映射 $Y\to X$, 从而说明层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 等价于 X 在拓扑空间与局部同胚映射范畴 LH 上的切片范畴 LH/X.

设 X,Y 是拓扑空间, $f:Y\to X$. 如果对任意的 $y\in Y$, 存在 y 的一个开邻域 U_y, 使得 $f(U_y)$ 是 X 中的开集并且 f 在 U_y 上的限制 $f|_{U_y}:U_y\to f(U_y)$ 是一个同胚, 则称 f 是一个局部同胚映射.

引理 5.2.1 (1) 任意一个局部同胚映射都是连续的开映射.

(2) 局部同胚映射的复合仍然是局部同胚映射.

证明 (1) 设 $f:Y\to X$ 是一个局部同胚映射, 由定义可知 f 在每一点处都连续, 因此是连续的. 另外对 Y 中任一开集 U, 存在 U 的一个开覆盖 $U=\bigcup U_i$, 使得每个 $f(U_i)$ 都是 X 中的开集, 故 $f(U)=\bigcup f(U_i)$ 是 X 中开集.

(2) 设 $f:Y\to X$, $g:X\to Z$ 都是局部同胚映射, 对任意的 $y\in Y$, 取 y 的一个开邻域 U_y, 使得 $f(U_y)$ 是 X 中的开集并且 f 在 U_y 上的限制 $f|_{U_y}:U_y\to f(U_y)$ 是一个同胚. 同时我们可以取 $f(y)$ 的一个开邻域 $V_y\subseteq f(U_y)$, 使得 $g(V_y)$ 是 Z 中的开集并且 g 在 V_y 上的限制 $g|_{V_y}:V_y\to g(V_y)$ 是一个同胚, 这时 y 的开邻域 $f^{-1}(V_y)\cap U_y$ 满足 $gf(f^{-1}(V_y)\cap U_y)=g(V_y)$ 是 Z 中的开集并且 $gf|_{f^{-1}(V_y)\cap U_y}:f^{-1}(V_y)\to gf(f^{-1}(V_y))$ 是一个同胚, 因此 gf 是局部同胚映射. □

由上面引理可知以所有拓扑空间为对象, 局部同胚映射为态射形成了拓扑空间范畴 Top 的一个子范畴, 记作 LH.

下面我们来讨论层与局部同胚映射之间的关系, 首先我们扩大讨论的范围, 考虑切片范畴 Top/X 与准层范畴 $[\Gamma(X)^{\mathrm{op}},\mathrm{Set}]$ 之间的关系.

设 $(Y,f)\in \mathrm{ob}(\mathrm{Top}/X)$. 对 X 中的任意开集 U, 令

$$\Theta_{(Y,f)}(U)=\{s\mid s:U\to Y\text{连续},\ fs:U\to X\text{是一个包含}\},$$

若 $V\subseteq U$, 则存在一个明显的限制映射

$$\Theta_{(Y,f)}(V\subseteq U):\Theta_{(Y,f)}(U)\to\Theta_{(Y,f)}(V),\qquad s\mapsto s|_V.$$

因此 $\Theta_{(Y,f)}$ 是空间 X 上的一个准层. 进一步如果 $U=\bigcup U_i$ 并且对每个 i 有 $s_i\in\Theta_{(Y,f)}(U_i)$, 使得 $s_i|_{U_i\cap U_j}=s_j|_{U_i\cap U_j}$, 则显然存在唯一的 $s\in\Theta_{(Y,f)}(U)$, 使得 s 在每个 U_i 上的限制 $s|_{U_i}=s_i$, 因此 $\Theta_{(Y,f)}$ 实际上是空间 X 上的一个层.

若 $p:(Y,f)\to(Z,g)$, 定义 $\Theta_p:\Theta_{(Y,f)}\to\Theta_{(Z,g)}$, 使得对 X 中任意开集 U,

$$\Theta_p(U):\Theta_{(Y,f)}(U)\to\Theta_{(Z,g)}(U),\qquad s\mapsto ps.$$

不难看出这样定义 Θ_p 是合适的, 即 $\Theta_p:\Theta_{(Y,f)}\to\Theta_{(Z,g)}$ 的确是一个准层态射, 即是一个自然变换. 因此下面的引理是明显的.

引理 5.2.2 $\Theta:\mathrm{Top}/X\to[\Gamma(X)^{\mathrm{op}},\mathrm{Set}]$ 定义了一个从切片范畴 Top/X 到准层范畴 $[\Gamma(X)^{\mathrm{op}},\mathrm{Set}]$ 的函子.

接下来, 我们来建立一个从准层范畴 $[\Gamma(X)^{\mathrm{op}},\mathrm{Set}]$ 到切片范畴 Top/X 的函子.

设 $F:\Gamma(X)^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Set}$ 是一个准层, $x\in X$. 不失一般性假设集族 $\{F(U)\mid x\in U\}$ 是两两不交的, 在并集 $\bigcup_{x\in U}F(U)$ 上定义一个等价关系如下:

$s\in F(U),t\in F(V)$, $s\sim t\Leftrightarrow$ 存在开集 $W\subseteq U\cap V$ 使得 $x\in W$ 并且

$$s|_W=t|_W,$$

记商集 $\bigcup_{x\in U}F(U)/\sim$ 为 F_x. 从极限的角度来看, 不难看出 F_x 其实是图表 $\{F(V\subseteq U):F(U)\to F(V)\mid x\in V\subseteq U\}$ 的余极限. 现在我们令

$$\Lambda_F=\coprod_{x\in X}F_x$$

为所有 F_x 的不交并, 记

$$f:\Lambda_F\to X,\ \text{对任意的 }[s]_x\in F_x,\ f([s]_x)=x,$$

这里 $[s]_x$ 表示 s 在并集 $\bigcup_{x\in U}F(U)$ 中的等价类. 对 X 中任意开集 U, 若 $s\in F(U)$, 则 s 确定了一个从 U 到 Λ_F 的映射

$$\dot{s}:U\to\Lambda_F,\ x\mapsto[s]_x.$$

集族 $\{\dot{s}(U) \mid s \in F(U), U \in \Gamma(X)\}$ 形成了 Λ_F 上的一个拓扑基, 在 Λ_F 上赋予该拓扑使之成为拓扑空间, 我们称之为准层 F 的关联层空间. 这时 $f: \Lambda_F \to X$ 是连续映射并且每个 $\dot{s}: U \to \Lambda_F$ 都是连续的开映射, 由于 $\dot{s}$ 都是单射, 因此每个 $\dot{s}$ 的值限制 $\dot{s}: U \to \dot{s}(U)$ 都是一个同胚. 进一步对任意的 $[s]_x \in F_x$ 和 x 的开邻域 U, $\dot{s}(U)$ 是 $[s]_x$ 的开邻域并且 $\dot{s}: U \to \dot{s}(U)$ 是 f 的限制 $f|_{\dot{s}(U)}: \dot{s}(U) \to U$ 的逆映射, 因此我们可以得到 $f: \Lambda_F \to X$ 实际上是一个局部同胚映射.

若 $\alpha: F \to G$ 是一个准层态射, 定义

$$\Lambda_\alpha: \Lambda_F \to \Lambda_G,\ [s]_x \mapsto [\alpha_U(s)]_x,\ x \in U, s \in F(U),$$

不难验证 Λ_α 是连续映射, 因此我们可以得到下面的引理.

引理 5.2.3　$\Lambda: [\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \to \mathrm{Top}/X$ 是一个函子.

定理 5.2.4　设 X 是拓扑空间, 则 $\Lambda: [\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \to \mathrm{Top}/X$ 与 $\Theta: \mathrm{Top}/X \to [\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ 是一对伴随函子, $(\Lambda \dashv \Theta)$. 并且 $\eta: 1_{[\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]} \to \Theta\Lambda$ 使得对任意的 $F \in \mathrm{ob}[\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$, $U \in \Gamma(X)$,

$$(\eta_F)_U: F(U) \to \Theta_{\Lambda_F}(U), \qquad s \mapsto \dot{s}$$

是伴随的单位, 而 $\varepsilon: \Lambda\Theta \to 1_{\mathrm{Top}/X}$ 使得对任意的 $(Y, f) \in \mathrm{ob}(\mathrm{Top}/X)$,

$$\varepsilon_{(Y,f)}: \Lambda_{\Theta_{(Y,f)}} \to (Y, f), \qquad [s]_x \mapsto s(x)$$

是伴随的余单位. 特别地, 如果 F 是一个层, 则 $\eta_F: F \to \Theta_{\Lambda_F}$ 是一个自然的同构, 如果 $f: Y \to X$ 是一个局部同胚映射, 则 $\varepsilon_{(Y,f)}: \Lambda_{\Theta_{(Y,f)}} \to (Y, f)$ 是一个同构.

证明　首先我们来说明 η 与 ε 是自然变换.

对 X 上的任意一个准层 F, 若 $U, V \in \Gamma(X)$, $V \subseteq U$, $s \in F(U)$, 由于 $\dot{s}|_V = \dot{\overline{s|_V}}: V \to \Lambda_F$, 故 $\eta_F: F \to \Theta\Lambda(F)$ 是一个自然变换. 设 $\alpha: F \to G$ 是一个准层态射, 对任意的 $U \in \Gamma(X)$, $s \in F(U)$, 都有 $\dot{\overline{\alpha_U(s)}} = \Lambda_\alpha \dot{s}: U \to \Lambda_G$, 即下面的方形交换:

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{(\eta_F)_U} & (\Theta\Lambda)(F)(U) \\ {\scriptstyle \alpha_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Theta\Lambda(\alpha_U)} \\ G(U) & \xrightarrow{(\eta_G)_U} & (\Theta\Lambda)(G)(U) \end{array}$$

因此 $\eta: 1_{[\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]} \to \Theta\Lambda$ 是一个自然变换.

对任意的 $(Y, f) \in \mathrm{ob}(\mathrm{Top}/X)$, 若 $s: U \to Y$, $t: V \to Y$ 满足 $[s]_x = [t]_x$, 则存在 x 的开邻域 $W \subseteq U \cap V$ 使得 $s|_W = t|_W$. 因此 $s(x) = t(x)$, 这说明定义 $\varepsilon_{(Y,f)}: \Lambda\Theta(Y, f) \to (Y, f)$, $[s]_x \mapsto s(x)$ 与 s 的选取无关. 另外容易验证 $\varepsilon_{(Y,f)}$ 是连续映射, 并且 $\varepsilon: \Lambda\Theta \to 1_{\mathrm{Top}/X}$ 是一个自然变换.

接下来我们来验证 η 与 ε, 使得下面两个复合都是单位自然变换:

$$\Theta \xrightarrow{\eta\Theta} \Theta\Lambda\Theta \xrightarrow{\Theta\varepsilon} \Theta, \qquad \Lambda \xrightarrow{\Lambda\eta} \Lambda\Theta\Lambda \xrightarrow{\varepsilon\Lambda} \Lambda.$$

对第一个复合, 设 $(Y,f) \in \mathrm{ob}(\mathrm{Top}/X)$, $U \in \Gamma(X)$. 则对任意的 $s \in \Theta_{(Y,f)}(U)$, 复合中的第一个映射将 s 对应为 $\dot{s}$, 而第二个映射将 $\dot{s}$ 对应为复合 $U \xrightarrow{\dot{s}} \Lambda_{\Theta_{(Y,f)}} \xrightarrow{\varepsilon_{(Y,f)}} Y$, 即 s 自身.

对第二个复合, 设 $F \in \mathrm{ob}[\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$, $U \in \Gamma(X)$. 则对任意的 $[s]_x \in \Lambda_F(U)$, 复合中的第一个映射将 $[s]_x$ 对应为 $[\dot{s}]_x$, 而第二个映射将 $[\dot{s}]_x$ 对应为 $\dot{s}(x) = [s]_x$.

这样我们就证明了伴随性 $(\Lambda, \Theta, \eta, \varepsilon) : [\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \to \mathrm{Top}/X$.

最后我们来证明如果 F 是一个层, 则 $\eta_F : F \to \Theta_{\Lambda_F}$ 是一个自然的同构, 如果 $f : Y \to X$ 是一个局部同胚映射, 则 $\varepsilon_{(Y,f)} : \Lambda_{\Theta_{(Y,f)}} \to (Y,f)$ 是一个同构.

设 F 是一个层, $U \in \Gamma(X)$. 若 $s, t \in F(U)$, $\dot{s} = \dot{t} : U \to \Lambda_F$, 则对任意的 $x \in U$, 由 $[s]_x = [t]_x$ 可知存在 x 的开邻域 $U_x \subseteq U$ 使得 $s|_{U_x} = t|_{U_x}$. 这时 $\{U_x \mid x \in U\}$ 构成 U 的开覆盖, 使得 s 和 t 在该覆盖中的每个开集上的限制都相同, 因此由层的定义可得 $s = t$. 这说明 $\eta_F(U) : F(U) \to \Theta_{\Lambda_F}(U)$ 是一个单射.

另一方面, 设 $h \in \Theta_{\Lambda_F}(U)$, 即 $h : U \to \Lambda_F$ 满足复合 $U \xrightarrow{h} \Lambda_F \xrightarrow{f} X$ 是一个包含. 则对任意的 $x \in U$, 存在 x 的开邻域 V_x 以及 $s_x \in F(V_x)$, 使得 $h(x) = [s_x]_x$. 由于 h 连续并且 $\dot{s_x}(V_x)$ 是 $[s_x]_x$ 在 Λ_F 中的开邻域, 因此存在 x 的开邻域 $W_x \subseteq U \cap V_x$, 使得 $h(W_x) \subseteq \dot{s_x}(V_x)$, 即 h 在 W_x 上的限制 $h|_{W_x}$ 与 $\dot{s_x}$ 的作用相同. 注意到对任意的 $x, y \in U$, $\dot{s_x}$ 在 $W_x \cap W_y$ 上的限制与 $\dot{s_y}$ 在 $W_x \cap W_y$ 上的限制相同, 因此由上面关于 $\eta_F(U)$ 是单射的证明可知, $s_x|_{W_x \cap W_y} = s_y|_{W_x \cap W_y}$. 因此由 $\{W_x \mid x \in U\}$ 构成 U 的开覆盖, 而 F 是层, 存在唯一的 $s \in F(U)$, 使得 $s|_{W_x} = s_x$. 这时对任意的 $x \in U$, $h(x) = \dot{s_x}(x) = \dot{s}(x)$, 从而有 $h = \dot{s}$. 这说明 $\eta_F(U) : F(U) \to \Theta_{\Lambda_F}(U)$ 是一个满射.

若 $f : Y \to X$ 是一个局部同胚映射, 我们来构造 $\varepsilon_{(Y,f)} : \Lambda_{\Theta_{(Y,f)}} \to (Y,f)$ 的一个逆.

设 $y \in Y$, 则存在 y 的开邻域 V 和 $f(y)$ 的开邻域 U, 使得 f 在 V 上的限制 $V \to U$ 是一个同胚. 记 $s : U \to Y$ 是该同胚的逆映射与 V 到 Y 的包含映射的复合, 则 $s \in \Theta_{(Y,f)}(U)$. 令

$$\theta : Y \to \Lambda_{\Theta_{(Y,f)}}, \qquad \theta(y) = [s]_{f(y)},$$

则容易验证 θ 是连续映射并且 $\theta\varepsilon_{(Y,f)}$ 与 $\varepsilon_{(Y,f)}\theta$ 都是恒同映射. □

由定理 5.2.4 立即可以得到下面推论.

推论 5.2.5 函子 Θ 与 Λ 在层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 与切片范畴 LH/X 上的限制成为一对等价函子, 即层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 等价于切片范畴 LH/X.

由于任意拓扑空间 X 上的层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 等价于切片范畴 LH/X, 因此许多范畴论著作中直接定义拓扑空间 X 上的一个层就是 X 上的一个局部同胚映射 $Y \to X$, 即切片范畴 LH/X 中的一个对象, 而一个层态射就是 LH/X 中的一个态射.

推论 5.2.6 包含函子 $I : \mathrm{Sh}(X) \to [\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ 存在左伴随, 即层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 是准层范畴 $[\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ 的反射子范畴. 同时包含函子 $J : LH/X \to \mathrm{Top}/X$ 存在右伴随, 即切片范畴 LH/X 是切片范畴 Top/X 的余反射子范畴.

证明 设 $\Lambda_0 : \mathrm{Sh}(X) \to LH/X$ 与 $\Theta_0 : LH/X \to \mathrm{Sh}(X)$ 分别是 Λ 与 Θ 的限制函子.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}(X) & \rightleftarrows & LH/X \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] & \rightleftarrows & \mathrm{Top}/X \end{array}$$

由于对任意准层 F, $\Lambda_F \in \mathrm{ob}(LH/X)$, 因此由伴随性 $(\Lambda \dashv \Theta)$ 可知 Λ 的值限制函子 $\Lambda' : [\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \to LH/X$ 是复合函子 $\Theta J : LH/X \to [\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ 的左伴随. 注意到与等价函子的复合不会影响伴随性, 因此复合函子 $\Theta_0\Lambda' : [\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \to \mathrm{Sh}(X)$ 是复合函子 $\Theta J \Lambda_0 : \mathrm{Sh}(X) \to [\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ 的左伴随. 但是由定理 5.2.4, 对任意一个层 F, Θ_{Λ_F} 与 F 是自然同构的, 故 $\Theta J \Lambda_0 = \Theta \Lambda I \cong I$, 因此函子 $\Theta_0\Lambda' : [\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \to \mathrm{Sh}(X)$ 是包含函子 I 的左伴随. 类似地, 我们可以证明包含函子 J 存在右伴随. □

我们称函子 $\Theta_0\Lambda' : [\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \to \mathrm{Sh}(X)$ 是准层范畴 $[\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ 的 **关联层函子** (associated sheaf functor) 或 **层化函子** (sheafification functor), 它将每个准层对应为它的“最佳层逼近”.

练习 5.2

1. (1) 证明一个局部同胚映射沿着任意一个连续映射的拉回仍然是局部同胚映射.

(2) 设下面三角形是一个由连续映射构成的交换图表:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & Z & \end{array}$$

如果 p, q 都是局部同胚映射, 证明 f 也是局部同胚映射.

(3) 证明包含函子 $I : LH \to \mathrm{Top}$ 产生拉回.

2. 证明函子 $\Lambda : [\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \to \mathrm{Top}/X$ 与 $\Theta : \mathrm{Top}/X \to [\Gamma(X)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ 都保持有限极限.

3. 设 X 是拓扑空间, T 是一个集合. X 上的一个 T 值准层是指对任意的 $U \in \Gamma(X)$, $T(U) = T$(我们用同一个 T 表示准层), 而所有的限制映射都是恒同映射. 证明在函子 Λ 的作用下, 准层 T 对应的局部同胚映射就是射影 $p : X \times T \to X$, 其中 T 是离散拓扑空间. 进一步证明 T 的关联层 $\Delta_T = \Theta_0\Lambda'(T)$ 满足对任意的 $V \in \Gamma(X)$, $\Delta_T(V)$ 由所有的连续映射 (局部常值映射)$f : X \to T$ 构成, 从而得出 $\Delta : \mathrm{Set} \to \mathrm{Sh}(X)$ 定义了一个函子, 并且该函子是函子 $\mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Set}$, $F \mapsto \Lambda F(X)$ 的左伴随.

5.3 层范畴的性质

本节我们来讨论拓扑空间 X 上的层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 的范畴性质, 我们将证明层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 具有集合范畴 Set 和拓扑空间范畴 Top 所共同具有的一些良好的性质, 如完备性, 存在一个子对象分类子 (subobject classifier) 等. 另一方面, 层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 与集合范畴一样, 具有一个拓扑空间范畴不具有的良好性质, 即层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 是Cartesian 闭范畴.

命题 5.3.1 设 X 是一个拓扑空间, 则层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 是一个完备范畴.

证明 首先我们来考虑等值子的情形.

设 $\alpha, \beta : F \to G$ 是 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的一对平行态射. 由引理 5.1.5 可知, 范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的极限如存在一定是逐点计算的, 因此对任意的 $U \in \Gamma(X)$, 我们定义

$$\gamma_U : E(U) \to F(U)$$

是平行对映射 $\alpha_U, \beta_U : F(U) \to G(U)$ 的等值子. 对任意的开集包含 $V \subseteq U$, 我们有 $\alpha_V(F(V \subseteq U)\gamma_U) = G(V \subseteq U)\alpha_U\gamma_U = G(V \subseteq U)\beta_U\gamma_U = \beta_V(F(V \subseteq U)\gamma_U)$. 因此由等值子定义, 存在唯一的映射 $E(V \subseteq U) : E(U) \to E(V)$, 使得 $F(V \subseteq U)\gamma_U = \gamma_V E(V \subseteq U)$.

$$\begin{array}{ccccc} E(U) & \xrightarrow{\gamma_U} & F(U) & \overset{\alpha_U}{\underset{\beta_U}{\rightrightarrows}} & G(U) \\ \vdots & & \downarrow{\scriptstyle F(V\subseteq U)} & & \downarrow{\scriptstyle G(V\subseteq U)} \\ E(V) & \xrightarrow{\gamma_V} & F(V) & \overset{\alpha_V}{\underset{\beta_V}{\rightrightarrows}} & G(V) \end{array}$$

由于 $\gamma_U : E(U) \to F(U)$ 和 $\gamma_V : E(V) \to F(V)$ 都是包含映射, 因此 $E(V \subseteq U) : E(U) \to E(V)$ 是 $F(V \subseteq U) : F(U) \to F(V)$ 的限制映射, 从而说明 E 是层 F 的一个子准层, 使得 $\gamma : E \to F$ 是一个自然变换. 因此我们只需说明 E 是一个层即可.

给定开集 U 的一个开覆盖 $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. 设 $s_i \in E(U_i) \subseteq F(U_i), i \in I$, 满足 $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$, 则由于 $F(V \subseteq U)$ 与 $E(V \subseteq U)$ 在 $E(U)$ 上的作用相同而 F 是

层, 因此存在唯一的 $s \in F(U)$, 使得 $s|_{U_i} = s_i$. 另外我们有 $\alpha_U(s)|_{U_i} = \alpha_{U_i}(s|_{U_i}) = \alpha_{U_i}(s_i) = \beta_{U_i}(s_i) = \beta_U(s)|_{U_i}$, 由于 G 是层, 因此有 $\alpha_U(s) = \beta_U(s)$, 即 $s \in E(U)$.

类似地, 我们可以逐点构造层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的积, 我们将此留给读者. 因此由定理 2.5.3 可得 $\mathrm{Sh}(X)$ 是完备的. □

在集合范畴 Set 中, 我们有两种利用映射来刻画集合 X 的子集 A 的方法. 一种是利用包含映射 $i: A \to X$, 另一种是利用特征函数 $\phi_A: X \to 2 = \{0, 1\}$,

$$\phi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

如果我们将两点集 $2 = \{0, 1\}$ 中的元素 1 视为 "真值", 则特征函数 ϕ_A 恰好把 A 中的所有元素都对应为 "真值". 我们可以把 2 中的 "真值" 用一个映射表示为

$$t: 1 = \{*\} \to 2, \qquad * \mapsto 1,$$

其中 $1 = \{*\}$ 是单点集合, 即范畴 Set 中的终对象. 这时 $i: A \to X$ 是一个包含映射, 可以等价地表达为存在唯一一个映射, (即特征映射)$\phi_A: X \to 2$, 使得下面的方形是一个拉回方形:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 1 \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ X & \xrightarrow{\phi_A} & 2 \end{array}$$

我们把集合范畴 Set 中的两点集 2 称为 Set 中的一个子对象分类子. 一般地, 我们在任意一个范畴中定义该范畴的一个子对象分类子如下.

定义 5.3.2 设 $\mathcal{C}$ 是一个有限完备范畴, 1 是 $\mathcal{C}$ 中的终对象. 若 $\mathcal{C}$ 中存在对象 Ω 和态射 $t: 1 \to \Omega$, 满足对 $\mathcal{C}$ 中的任意一个单态射 $m: A \to B$, 都存在唯一的态射 $\phi: B \to \Omega$ 使得下面的方形是一个拉回方形:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 1 \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ B & \xrightarrow{\phi} & \Omega \end{array}$$

则称 Ω 是 $\mathcal{C}$ 中的一个**子对象分类子** (subobject classifier).

类似于集合范畴 Set 中的情形, 我们可以验证两点集 2 赋予平庸拓扑是拓扑空间范畴 Top 中的子对象分类子. 下面我们来说明层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中存在子对象分类子.

设 X 是一个拓扑空间, 对 X 中任意开集 U, 定义

$$\Omega(U) = \{W \in \Gamma(X) \mid W \subseteq U\},$$

若开集 $V \subseteq U$, 则有明显的限制映射

$$\Omega(V \subseteq U): \Omega(U) \to \Omega(V), \qquad W \mapsto W \cap V,$$

因此 Ω 是空间 X 上的一个准层.

命题 5.3.3 Ω 是拓扑空间 X 上的一个层, 并且 Ω 是层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的子对象分类子.

证明 设 $U \in \Gamma(X)$, 给定 U 的任意开覆盖 $U = \bigcup U_i$. 若对每个 i 都有开集 $V_i \subseteq U_i$, 使得 $V_i \cap U_j = V_j \cap U_i$, 则 $V = \bigcup V_i \subseteq U$ 是满足对任意的 i, $V \cap U_i = V_i$ 都成立的唯一的开集, 因此 Ω 是一个层.

对任意的 $U \in \Gamma(X)$, 令

$$t_U : 1(U) \to \Omega(U), \qquad * \mapsto U,$$

容易看出 $t: 1 \to \Omega$ 是一个自然变换, 即层态射.

设层 S 是层 F 的一个子对象, 由推论 5.1.6, 我们可以视 S 为 F 的一个子层, 包含态射为 $m: S \to F$. 对任意的 $U \in \Gamma(X)$, 定义

$$\phi_U : F(U) \to \Omega(U), \qquad x \mapsto \bigcup\{V \in \Gamma(X) \mid x|_V \in S(V), V \subseteq U\}.$$

注意到 F 是一个层, 因此 $x|_{\phi(x)} \in S(\phi(x))$, 并且不难验证 $\phi: F \to \Omega$ 是一个自然变换. 对任意的 $U \in \Gamma(X)$, 下面方形是交换的:

$$\begin{array}{ccc} S(U) & \longrightarrow & 1(U) \\ {\scriptstyle m_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t_U} \\ F(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \Omega(U) \end{array}$$

如果 $x \in F(U)$, $\phi_U(x) = U$, 则 $x = x|_U \in S(U)$, 因此 $S(U)$ 是 $F(U)$ 中所有使得 $\phi_U(x) = U$ 的元素 x 构成的子集. 对任意一个如下的交换方形:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 1(U) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t_U} \\ F(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \Omega(U) \end{array}$$

p 的像 $p(A) \subseteq S(U)$, 因此 p 可以通过 m_U 唯一分解. 这样我们就证明了 $m_U : S(U) \to F(U)$ 是 $t_U : 1(U) \to \Omega(U)$ 沿着 $\phi_U : F(U) \to \Omega(U)$ 的拉回. 由命题 5.3.1 的证明可知下面方形是层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的一个拉回方形:

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & 1 \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ F & \xrightarrow{\phi} & \Omega \end{array}$$

欲证 ϕ 的唯一性, 设层态射 $\varphi : F \to \Omega$ 使得下面的方形是层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的一个拉回方形：

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & 1 \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ F & \xrightarrow{\varphi} & \Omega \end{array}$$

则对任意的 $U \in \Gamma(X)$, 下面方形是集合范畴 Set 中的一个拉回方形：

$$\begin{array}{ccc} S(U) & \longrightarrow & 1(U) \\ {\scriptstyle m_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t_U} \\ F(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \Omega(U) \end{array}$$

若 $V \subseteq U$, $x \in F(U)$, $x|_V \in S(V)$, 则由 φ 是自然变换可知 $\varphi_U(x) \cap V = \varphi_V(x|_V) = V$, 故 $V \subseteq \varphi_U(x)$, 从而说明 $\phi_U(x) \subseteq \varphi_U(x)$. 同样由 φ 是自然变换可知, 对任意的 $x \in F(U)$, $\varphi_{\varphi_U(x)}(x|_{\varphi_U(x)}) = \varphi_U(x)$. 但是由于 $S(\varphi_U(x))$ 是集合 $F(\varphi_U(x))$ 中在映射 $\varphi_{\varphi_U(x)}$ 下的像为 $\varphi_U(x)$ 的所有元素的子集, 因此 $x|_{\varphi_U(x)} \in S(\varphi_U(x))$, 这说明 $\varphi_U(x) \subseteq \phi_U(x)$, 从而 $\varphi_U(x) = \phi_U(x)$. 由 U 和 x 的任意性可知 $\varphi = \phi$. □

在本节的最后我们来证明层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 是 Cartesian 闭范畴.

命题 5.3.4 设 X 是一个拓扑空间, 则层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 是 Cartesian 闭范畴.

证明 设 F, G 是空间 X 上的两个层. 对任意的 $U \in \Gamma(X)$, F 可以限制为子空间 U 上的一个层 $F|_U : \Gamma(U)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ 使得对任意的开集 $V \subseteq U$, $F|_U(V) = F(V)$, $F|_U(V \subseteq U) = F(V \subseteq U) : F(U) \to F(V)$.

设 $U \in \Gamma(X)$, 令 $G^F(U) = \mathrm{Nat}(F|_U, G|_U)$ 表示 $F|_U$ 与 $G|_U$ 之间的自然变换全体构成的集合. 若 $V \subseteq U$, 存在一个自然的限制映射

$$G^F(V \subseteq U) : G^F(U) \to G^F(V), \qquad \alpha \mapsto \alpha|_V.$$

这里 $\alpha|_V : F|_V \to G|_V$ 是 α 的限制, 即对任意的 $W \subseteq V$, $\alpha|_V(W) = \alpha(W) : F(W) \to G(W)$. 容易看出这样定义了空间 X 上的一个准层 G^F, 首先我们来说明 G^F 是一个层.

给定 U 的一个开覆盖 $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, 以及自然变换 $\alpha_i : F|_{U_i} \to G|_{U_i}$, $i \in I$ 使得 $\alpha_i|_{U_i \cap U_j} = \alpha_j|_{U_i \cap U_j}$ 对任意的 $i, j \in I$ 成立. 设开集 $V \subseteq U$, 则所有的 $W_i = U_i \cap V$ 构成 V 的开覆盖, 并且 $\tilde{\alpha_i} = \alpha_i|_{W_i} : F|_{W_i} \to G|_{W_i}$ 仍然满足 $\tilde{\alpha_i}|_{W_i \cap W_j} = \tilde{\alpha_j}|_{W_i \cap W_j}$. 从而对任意的 $x \in F(V)$, $\tilde{\alpha_i}(x|_{W_i})|_{W_i \cap W_j} = \tilde{\alpha_j}(x|_{W_j})|_{W_i \cap W_j}$. 由于 G 是层, 故存在唯一的 $\alpha_V(x) \in G(V)$, 使得 $\alpha_V(x)|_{W_i} = \tilde{\alpha_i}(x|_{W_i})$. 因此我们可以得到一个映射

$\alpha_V : F(V) \to G(V)$, $x \mapsto \alpha_V(x)$ 使得下面的方形交换：

$$\begin{array}{ccc} F(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & G(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(W_i) & \xrightarrow{\tilde{\alpha_i}} & G(W_i) \end{array}$$

不难验证 $\alpha : F|_U \to G|_U$ 是一个自然变换并且 $\alpha|_{U_i} = \alpha_i$, 因此 G^F 是一个层.

对任意的 $U \in \Gamma(X)$, 定义

$$e_U : F(U) \times G^F(U) \to G(U), \qquad (x, \alpha) \mapsto \alpha(x),$$

则不难看出这样定义了一个自然变换 $e : F \times G^F \to G$. 若 P 是拓扑空间 X 上的一个层, $\varphi : F \times P \to G$ 是一个自然变换. 对每个 $U \in \Gamma(X)$, 定义 $\varphi'_U : P(U) \to G^F(U)$ 使得对任意的 $x \in P(U)$

$$\varphi'(x) : F|_U \to G|_U,\ \varphi'(x)(t) = \varphi(t, x), \qquad t \in F(V),\ V \subseteq U.$$

容易看出每个 $\varphi'(x)$ 都是一个自然变换, 因此这样的定义是恰当的. 进一步我们可以验证 $\varphi' : P \to G^F$ 是一个自然变换, 并且满足 $\varphi = e(1_F \times \varphi')$, 即下面的三角形交换：

$$\begin{array}{ccc} F \times G^F & \xrightarrow{e} & G \\ \uparrow & \nearrow & \\ F \times P & & \end{array}$$

φ' 的唯一性由 e 的定义和层范畴中积的逐点性是明显的. □

练习 5.3

1. 试给出层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的积的构造.
2. 试证明层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的子对象分类子 Ω 是 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的一个单射对象.
3. 类似于命题 5.3.1 的证明, 试证明层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 是余完备的.
4. 证明一个完备格 L 看作一个范畴存在子对象分类子, 当且仅当 L 是平凡的 (即 L 只含有一个元素).

5.4 定向层函子与逆向层函子

在 5.1~5.3 节中我们讨论了层范畴的内部性质, 本节我们来讨论不同层范畴之间的关系. 我们将会看到给定一个连续映射 $f : X \to Y$, f 可以自然地诱导出层范

畴 Sh(X) 与 Sh(Y) 之间的一对伴随函子: 定向层函子 $f_*:\mathrm{Sh}(X)\to\mathrm{Sh}(Y)$ 和逆向层函子 $f^*:\mathrm{Sh}(Y)\to\mathrm{Sh}(X)$.

设 $f:X\to Y$ 是一个连续映射, 则

$$f^{-1}:\Gamma(Y)^{\mathrm{op}}\to\Gamma(X)^{\mathrm{op}},\qquad V\mapsto f^{-1}(V)$$

是一个保序映射, 因此可以看作一个函子. 对空间 X 上的任意一个层 $P:\Gamma(X)^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Set}$, 由于 f^{-1} 保持有限交和任意并运算, 因此复合函子

$$\Gamma(Y)^{\mathrm{op}}\xrightarrow{f^{-1}}\Gamma(X)^{\mathrm{op}}\xrightarrow{P}\mathrm{Set}$$

仍然是空间 Y 上的一个层. 这样我们可以定义一个函子

$$f_*:\mathrm{Sh}(X)\to\mathrm{Sh}(Y),$$

使得对 Sh(X) 中的任意态射 $\alpha:P\to Q$, 层态射 $f_*(\alpha):f_*(P)\to f_*(Q)$ 满足对任意的 $U\in\Gamma(Y)$

$$f_*(\alpha)_U=\alpha_{f^{-1}(U)}:f_*(P)(U)=P(f^{-1}(U))\to f_*(Q)(U)=Q(f^{-1}(U)).$$

我们称 f_* 是由 f 确定的定向层函子.

引理 5.4.1　设 $p:P\to Y$ 是一个局部同胚映射, 则 p 沿着连续映射 $f:X\to Y$ 的拉回 $p^*:f^*(P)\to X$ 仍然是一个局部同胚映射.

$$\begin{array}{ccc} f^*(P) & \longrightarrow & P \\ {\scriptstyle p^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

证明　由拓扑空间范畴中的拉回构造, $f^*(P)$ 同胚于积空间 $X\times P$ 的子空间 $\{(x,t)\in X\times P\mid f(x)=p(t)\}$. 对任意的 $(x,t)\in f^*(P)$, 选取 t 的开邻域 U, 使得 $p(U)$ 是 Y 中的开集并且 p 的限制 $p|_U:U\to p(U)$ 是一个同胚. 则容易验证 (x,t) 的开邻域 $W=(f^{-1}(p(U))\times U)\cap f^*(P)$ 满足 $p^*(W)=f^{-1}(p(U))$ 是 X 中开集并且 $p^*|_W:W\to f^*(W)$ 是一个同胚, 因此 $p^*:f^*(P)\to X$ 是一个局部同胚映射.　□

另外, 如果 $p:P\to Y$ 与 $q:Q\to Y$ 都是局部同胚映射, $g:P\to Q$ 是连续映射使得 $p=qg$ 成立, 则容易验证 $g:P\to Q$ 仍然是一个局部同胚映射.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & Q \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & Y & \end{array}$$

考虑到拉回是可以复合的, 沿用引理 5.4.1 中的记号即 $(qg)^* = q^*g^*$. 结合定理 5.2.4 和引理 5.4.1, 我们可以方便地定义从切片范畴 LH/Y 到切片范畴 LH/X 的一个函子

$$f^* : LH/Y \to LH/X,$$

使得对范畴 LH/Y 中的任意一个态射 $h : (P, p) \to (Q, q)$,

$$f^*(h) : (f^*(P), p^*) \to (f^*(Q), q^*)$$

满足 $p^* = (qh)^* = q^*f^*(h)$. 由推论 5.2.5, 我们可以得到层范畴 $\mathrm{Sh}(Y)$ 到 $\mathrm{Sh}(X)$ 的一个函子

$$\mathrm{Sh}(Y) \xrightarrow{\Lambda} LH/Y \xrightarrow{f^*} LH/X \xrightarrow{\Theta} \mathrm{Sh}(X)$$

我们将该函子仍然记作

$$f^* : \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$$

我们称 $f^* : \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$ 是由 f 确定的逆向层函子. 接下来, 我们来证明逆向层函子 $f^* : \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$ 与定向层函子 $f_* : \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(Y)$ 事实上是一对伴随函子.

命题 5.4.2 设 $f : X \to Y$ 是连续映射, 则逆向层函子 $f^* : \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$ 与定向层函子 $f_* : \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(Y)$ 是一对伴随函子, $(f^* \dashv f_*)$.

证明 首先注意到对空间 Y 上的任意一个层 G, Λ_G 沿着 f 的拉回 $f^*(\Lambda_G)$ 是积空间 $X \times \Lambda_G$ 的子空间 $\{(x, [s]_y) \in X \times \Lambda_G \mid y = f(x)\}$.

$$\begin{array}{ccc} f^*(\Lambda_G) & \longrightarrow & \Lambda_G \\ {\scriptstyle g^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

故层 $f^*(G)$ 满足对任意的 $U \in \Gamma(X)$,

$$f^*(G)(U) = \{t : U \to f^*(\Lambda_G) \mid t\text{是连续映射}, \ g^*t : U \to X\text{是包含映射}\}.$$

对拓扑空间 Y 上的任意一个层 G 以及任意的 $V \in \Gamma(Y)$, 定义

$$\eta_G(V) : G(V) \to f_*f^*(G)(V), \ s \mapsto (\eta_G(V)(s) : f^{-1}(V) \to f^*(\Lambda_G)),$$

使得对任意的 $x \in f^{-1}(V)$,

$$\eta_G(V)(s)(x) = (x, [s]_{f(x)}).$$

若 Y 中的开集 $W \subseteq V$, 则对任意的 $x \in f^{-1}(W)$, $[s|_W]_{f(x)} = [s]_{f(x)}$, 因此可以看出 $\eta_G : G \to f_*f^*(G)$ 是一个层态射. 另外如果 G 与 G' 是空间 Y 上的两个层, $\alpha : G \to G'$ 是层态射. 则容易验证对任意的 $V \in \Gamma(Y)$, 下面的方形交换:

$$\begin{array}{ccc} G(V) & \xrightarrow{\eta_G(V)} & f_*f^*(G)(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G'(V) & \xrightarrow{\eta_{G'}(V)} & f_*f^*(G')(V) \end{array}$$

因此

$$\eta : 1_{\mathrm{Sh}(Y)} \to f_*f^*$$

是一个自然变换.

欲定义伴随的余单位, 设 F 是拓扑空间 X 上的一个层, $U \in \Gamma(X)$. 由于 $f^*f_*(F)$ 是拓扑空间 X 上的层, 因此对任意一个满足 $f_*(F)^*p : U \to X$ 是包含映射的连续映射 $p : U \to f^*(\Lambda_{f_*(F)})$(其中 $f_*(F)^* : f^*(\Lambda_{f_*(F)}) \to X$ 是映射 $\Lambda_{f_*(F)} \to Y$ 的拉回), p 的值限制 $p : U \to p(U)$ 一定是一个同胚.

$$\begin{array}{ccc} f^*(\Lambda_{f_*(F)}) & \longrightarrow & \Lambda_{f_*(F)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

从而 $p(U)$ 可以表达为空间 $f^*(\Lambda_{f_*(F)})$ 中一族基本开子集的并

$$p(U) = \bigcup_{i \in I} \{(x, [s_i]_{f(x)}) \mid s_i \in F(f^{-1}(V_i)), x \in U_i \cap f^{-1}(V_i)\},$$

其中 $U_i \in \Gamma(X), V_i \in \Gamma(Y), i \in I$. 这时 $U = \bigcup_{i \in I} U_i \cap f^{-1}(V_i)$, 并且对任意的 $i, j \in I$, $s_i|_{U_i \cap U_j \cap f^{-1}(V_i \cap V_j)} = s_j|_{U_i \cap U_j \cap f^{-1}(V_i \cap V_j)}$. 由于 F 是层, 存在唯一的 $s_p \in F(U)$ 使得 $s_p|_{U_i \cap f^{-1}(V_i)} = s_i|_{U_i \cap f^{-1}(V_i)}$. 上面的论证可以总结为如果连续映射 $p : U \to f^*(\Lambda_{f_*(F)})$ 满足 $f_*(F)^*p : U \to X$ 是包含映射, 则存在唯一的 $s_p \in F(U)$ 使得

$$p(U) = \bigcup_{i \in I} \{(x, [s_p]_{f(x)}) \mid x \in U_i \cap f^{-1}(V_i)\}.$$

由此我们可以定义

$$\varepsilon_F(U) : f^*f_*(F)(U) \to F(U), \ (p : U \to f^*(\Lambda_{f_*(F)})) \mapsto s_p.$$

不难验证这样定义了一个层态射 $\varepsilon_F : f^*f_*(F) \to F$. 进一步可以验证如此定义了一个自然变换

$$\varepsilon : f^*f_* \to 1_{\mathrm{Sh}(X)}.$$

最后我们来验证 η 与 ε, 使得下面两个复合都是单位自然变换:

$$f_* \xrightarrow{\eta f_*} f_*f^*f_* \xrightarrow{f_*\varepsilon} f_*, \qquad f^* \xrightarrow{f^*\eta} f^*f_*f^* \xrightarrow{\varepsilon f^*} f^*.$$

对第一个复合, 设 F 是空间 X 上的一个层, $V \in \Gamma(Y)$. 首先 ηf_* 将每个 $s \in f_*(F)(V) = F(f^{-1}(V))$ 对应为连续映射 $f^{-1}(V) \to f^*(\Lambda_{f_*(F)})$, $x \mapsto (x, [s]_{f(x)})$, 接下来由 $f_*\varepsilon$ 作用为 s, 因此第一个复合是单位自然变换. 类似地可以验证第二个复合是单位自然变换. □

命题 5.4.3 设 $f: X \to Y$ 是连续映射, 则逆向层函子 $f^*: \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$ 保持有限极限.

证明 我们只需证明拉回函子 $f^*: LH/Y \to LH/X$ 保持有限极限即可.

首先, 单位态射 $1_X: X \to X$ 沿着 f 的拉回是单位态射 $1_Y: Y \to Y$, 故 f^* 保持终对象. 下面我们来证明 f^* 保持拉回, 从而由命题 2.6.2 可得 f^* 保持有限极限.

设 $(P,p), (Q,q), (R,r) \in \mathrm{ob}(LH/X)$, $h: (P,p) \to (Q,q)$, $g: (R,r) \to (Q,q)$ 是 LH/X 中的态射. 注意到遗忘函子 $U: LH/X \to LH$ 产生拉回, 因此在范畴 LH 中 R 沿着 $h: P \to Q$ 的拉回就是范畴 LH/X 中 (R,r) 沿着 $h: (P,p) \to (Q,q)$ 的拉回, 记作 $P \times_h R = \{(m,n) \in P \times R \mid h(m) = g(n)\}$. 我们只需要证明下面方形仍然是范畴 LH 中的一个拉回方形即可.

$$\begin{array}{ccc} f^*(P \times_h R) & \longrightarrow & f^*(R) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*(g)} \\ f^*(P) & \xrightarrow{f^*(h)} & f^*(Q) \end{array}$$

由范畴 LH 中的拉回构造可知 $f^*(P \times_h R) = \{(x,(m,n)) \in X \times (P \times_h R) \mid f(x) = p(m) = r(n)\}$, 态射 $f^*(P \times_h R) \to f^*(R)$ 将每个 $(x,(m,n)) \in f^*(P \times_h R)$ 对应为 (x,n), 同时态射 $f^*(P \times_h R) \to f^*(P)$ 将每个 $(x,(m,n)) \in f^*(P \times_h R)$ 对应为 (x,m). 不难验证该方形的确是一个拉回方形. □

练习 5.4

1. 设 $f: X \to Y$ 是一个局部同胚映射, 试证明逆向层函子 $f^*: \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$ 存在左伴随.

2. 试举例说明对一般的连续映射 $f: X \to Y$, 逆向层函子 $f^*: \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$ 不必存在左伴随.

5.5 Grothendieck 拓扑与 Grothendieck 层

在前面几节中我们介绍了定义在一个拓扑空间上的层, 但是在实际应用中, 如

在余同调理论和代数几何中, 人们需要定义在更一般的"广义拓扑"结构上的层概念. 定义在拓扑空间 X 上的层需要开集包含 $V \to U$, 而这种包含是范畴 $\Gamma(X)$ 中的单态射, 而在代数几何中人们需要用更一般的映射 $V \to U$ 来取代单态射 $V \to U$, Grothendieck 拓扑与Grothendieck 层正是在这种需求下产生的. Grothendieck 拓扑推广了通常拓扑中的"覆盖"的概念, 在一个小范畴上定义了一种广义的"覆盖结构", 从而可以在这个广义的"拓扑"中定义层的概念, 即 Grothendieck 层. Grothendieck 层具有非常类似于通常层的良好性质, 限于篇幅, 我们只想用一节的内容简单介绍其基本的概念, 读者如果想进一步了解这方面的内容可参阅文献 [27]、[28]、[38].

设 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴, $C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$. 我们称可表达函子

$$\mathcal{C}(-, C) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$$

在函子范畴 $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ 中的任意一个子对象 S 为对象 C 上的一个筛(sieve). 等价的说法是对象 C 的一个筛就是一族以 C 为值域的态射 $S = \{\cdot \to C\}$ 满足条件:

$$\mathrm{cod}(g) = \mathrm{dom}(f), \qquad f \in S \Rightarrow fg \in S.$$

设 S 是对象 C 上的一个筛, $h : D \to C$ 是一个态射, 则

$$h^*(S) = \{g \mid \mathrm{cod}(g) = D,\ hg \in S\}$$

是对象 D 上的一个筛.

定义 5.5.1 设 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴, 如果对 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 C 都指定了一个由 C 上的筛构成的集合 $J(C)$ 满足下面条件:

(1) 对任意的 $C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, C 上最大的筛 $t_C = \{f \mid \mathrm{cod}(f) = C\}$ 在 $J(C)$ 中.

(2) 如果 $h : D \to C$, $S \in J(C)$, 则 $h^*(S) \in J(D)$.

(3) 若 $S \in J(C)$, R 是 C 上的一个筛, 使得对 S 中的任意态射 $h : D \to C$, $h^*(R) \in J(D)$, 则 $R \in J(C)$.

则称 $\{J(C) \mid C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}\}$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个Grothendieck 拓扑, 记作 J.

由定义 5.5.1, 立即可以得到 Grothendieck 拓扑的下面几点性质:

(a) 如果 $S \in J(C)$, R 是 C 上的一个筛并且 $S \subseteq R$, 则 $R \in J(C)$. 事实上对任意的 $f \in S$, $f^*(R) \supseteq f^*(S)$ 是 f 的值域 $\mathrm{cod}(f)$ 上最大的筛, 由条件 (1) 可知 $f^*(R) \in J(\mathrm{cod}(f))$, 从而由条件 (3) 知 $R \in J(C)$.

(b) 如果 $S \in J(C)$ 并且对 S 中的任意一个态射 $f : D_f \to C$, 存在一个筛 $R_f \in J(D_f)$, 则 $\{fg \mid f \in S,\ g \in R_f\} \in J(C)$.

(c) 如果 $R, S \in J(C)$, 则 $R \cap S \in J(C)$. 事实上对 R 中的任意一个态射 $f : D \to C$, 由条件 (2) 可得 $f^*(R \cap S) = f^*(S) \in J(D)$, 从而由条件 (3) 知 $R \cap S \in J(C)$.

一个小范畴 $\mathcal{C}$ 赋予一个 Grothendieck 拓扑 J 记作 $(\mathcal{C}, J)$, 称为一个 **场**(site). 对 $\mathcal{C}$ 中任意一个对象 C, 若 $S \in J(C)$, 则称 S 是 C 的一个覆盖筛. 若 $f: A \to B$ 是 $\mathcal{C}$ 中一个态射, S 是 B 上的一个筛, 使得 $f^*(S)$ 是 A 的一个覆盖筛, 则称 S 是 f 的一个覆盖筛.

设 X 是一个拓扑空间, X 的拓扑 $\Gamma(X)$ 在包含序关系下可以看作一个小范畴. 对任意的开集 $U \in \Gamma(X)$, 令

$$J(U) = \{S \subseteq \Gamma(X) \mid \bigcup S = U, \text{若 } V \subseteq U \in S, \text{则 } V \in S\},$$

则不难看出 J 是 $\Gamma(X)$ 上的一个 Grothendieck 拓扑. 因此 Grothendieck 拓扑就是通常的拓扑在覆盖意义下的推广.

从上面的论述中我们可以看出 Grothendieck 拓扑中任意一个对象的覆盖筛都是一个筛, 而对应在通常的拓扑中一个开集 U 的一个覆盖筛就是 U 的一个开覆盖 S 并且要满足

$$\text{若 } V \subseteq U,\ U \in S, \qquad \text{则 } V \in S.$$

但是在通常拓扑中, 我们描述 U 的开覆盖 S' 只要 $\bigcup S' = U$ 即可, 并不需要 S' 是一个筛, 不过 U 的任意一个开覆盖 S' 确实可以生成 U 上的一个覆盖筛 $S = \{V \in \Gamma(X) \mid \text{存在} U \in S',\ V \subseteq U\}$. 下面我们来定义一种更一般的 Grothendieck 拓扑概念, 我们称之为Grothendieck 拓扑基, 它不要求对象的覆盖必须是一个筛, 但是可以生成一个筛, 从而任意一个 Grothendieck 拓扑基都可以生成一个 Grothendieck 拓扑.

定义 5.5.2 设 $\mathcal{C}$ 是一个存在拉回的小范畴, 如果对 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 C 都指定了一个由以 C 为值域的态射构成的集合 $K(C)$ 满足下面条件:

(1′) 若 $f: C' \to C$ 是一个同构, 则 $f \in K(C)$.

(2′) 若 $\{f_i : C_i \to C \mid i \in I\} \in K(C)$, $g: D \to C$ 是 $\mathcal{C}$ 中的任意一个态射, 则所有的 f_i 沿着 g 的拉回态射族 $\{\pi_2 : C_i \times_g D \to D \mid i \in I\} \in K(D)$.

(3′) 若 $\{f_i : C_i \to C \mid i \in I\} \in K(C)$, 并且对每个 $i \in I$ 都存在一个 $\{g_{ij} : D_{ij} \to C_i \mid j \in I_i\} \in K(C_i)$, 则复合态射族 $\{f_i g_{ij} : D_{ij} \to C \mid i \in I, j \in I_i\} \in K(C)$.

则称 $\{K(C) \mid C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}\}$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个Grothendieck 拓扑基, 记作 K.

小范畴 $\mathcal{C}$ 赋予一个 Grothendieck 拓扑基 K, 记作 $(\mathcal{C}, K)$, 仍然称为一个场. 对 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 C, $K(C)$ 中的元素称为 C 的覆盖.

由上面定义可以看出, $\mathcal{C}$ 上的一个 Grothendieck 拓扑 J 未必满足条件 (1′), 从而未必是一个 Grothendieck 拓扑基 (可以验证 J 满足条件 (2′) 和 (3′)). 但是 $\mathcal{C}$ 上的任意一个 Grothendieck 拓扑基 K 都可以生成 $\mathcal{C}$ 上的一个 Grothendieck 拓扑 J 使得:

$$S \in J(C) \Longleftrightarrow S\text{是 } C\text{上的一个筛并且存在 } R \in K(C), \qquad R \subseteq S.$$

现在我们就可以完全类似于在拓扑空间上定义层的情形, 在任意一个场上来定义层的概念.

定义 5.5.3　设 $(\mathcal{C}, J)$ 是一个场:

(1) 若 $P : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \text{Set}$ 一个反变函子, 我们称 P 为场 $(\mathcal{C}, J)$ 上的一个准层 (presheaf).

(2) 如果准层 P 满足对任意的 $C \in \text{ob}\mathcal{C}$ 以及 C 的任意覆盖筛 $S \in J(C)$, $e : P(C) \to \prod_{f\in S} P(\text{dom}(f))$ 是平行对映射

$$p, q : \prod_{f\in S} P(\text{dom}(f)) \to \prod_{f\in S, \text{dom}(f)=\text{cod}(g)} P(\text{dom}(g))$$

的等值子, 则称 P 是场 $(\mathcal{C}, J)$ 上的一个层 (sheaf), 这里 $e : x \mapsto (P(f)(x))_f$, $p : (x_f)_f \mapsto (x_{fg})_{f,g}, q : (x_f)_f \mapsto (P(g)(x_f))$.

上面的定义可以方便地解释为准层 $P : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \text{Set}$ 是场 $(\mathcal{C}, J)$ 上的一个层当且仅当 P 满足下面条件:

(2*) 对任意的覆盖筛 $S \in J(C)$, 以及任意一个元素族 $\{x_f \in P(D) \mid (f : D \to C) \in S\}$ 满足对任意一个态射 $g : E \to D$ 都有

$$P(g)(x_f) = x_{fg}$$

成立, 则存在唯一的元素 $x \in P(C)$ 满足

$$P(f)(x) = x_f$$

对所有的 $f \in S$ 成立.

设 K 是小范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个 Grothendieck 拓扑基, J 是由 K 生成的 Grothendieck 拓扑, 下面我们来证明场 $(\mathcal{C}, J)$ 上的任意一个层可以完全由 K 确定.

为了方便, 我们首先引进一个概念. 设 $R = \{f_i : C_i \to C \mid i \in I\} \in K(C)$ 是对象 C 的一个覆盖. 如果元素族 $\{x_i \in P(C_i) \mid i \in I\}$ 满足

$$P(\pi_i)(x_i) = P(\pi_j)(x_j)$$

对任意的 $i, j \in I$ 成立, 则称 $\{x_i \in P(C_i) \mid i \in I\}$ 是一个 **相容族** (matching family). 这里 π_i 与 π_j 分别是 f_i 与 f_j 的拉回.

$$\begin{array}{ccc} C_i \times_C C_j & \xrightarrow{\pi_j} & C_j \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_i} & & \downarrow{\scriptstyle f_j} \\ C_i & \xrightarrow{f_i} & C \end{array}$$

命题 5.5.4　设 $P : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \text{Set}$ 是一个准层. P 是场 $(\mathcal{C}, J)$ 上的一个层当且仅当对 $\mathcal{C}$ 中的任意一个对象 C 以及 C 的任意一个覆盖 $R = \{f_i : C_i \to C \mid i \in I\} \in$

$K(C)$, 任意一个相容族 $\{x_i \in P(C_i) \mid i \in I\}$ 都存在唯一的元素 $x \in P(C)$, 使得 $P(f_i)(x) = x_i$ 对所有的 $i \in I$ 成立.

证明 (必要性) 若 P 是场 $(\mathcal{C}, J)$ 上的一个层, $R = \{f_i : C_i \to C \mid i \in I\} \in K(C)$, $\{x_i \in P(C_i) \mid i \in I\}$ 是一个相容族. R 可以生成 C 的一个 J覆盖筛如下:

$$S = (R) = \{g : D \to C \mid g = D \xrightarrow{k} C_i \xrightarrow{f_i} C,\ f_i \in R\}.$$

对每个 $(g = D \xrightarrow{k} C_i \xrightarrow{f_i} C) \in S$, 定义 $y_g \in P(D)$ 使得

$$y_g = P(k)(x_i),$$

这个定义与 g 和 f_i 的选取无关. 事实上如果 $f_i k = g = f_j h$, 则考虑由 f_i 与 f_j 形成的拉回方形 (如上面的方形), 由万有性质存在唯一的态射 $r : D \to C_i \times_C C_j$ 使得 $k = \pi_i r,\ h = \pi_j r$, 因此由 $\{x_i \in P(C_i) \mid i \in I\}$ 的相容性可知

$$P(k)(x_i) = P(r)(P(\pi_i(x_i)) = P(r)(P(\pi_j(x_j)) = P(h)(x_j).$$

显然元素族 $\{y_g \mid g \in S\}$ 满足 (2*) 中的条件, 因此存在唯一的元素 $y \in P(C)$, 使得 $P(g)(y) = y_g$ 对任意的 $g \in S$ 成立. 特别对每个 $f_i \in R$, 我们有 $P(f_i)(y) = y_{f_i} = x_i$. 若 $y' \in P(C)$ 仍然满足对每个 $f_i \in R$ 都有 $P(f_i)(y') = x_i$ 成立, 则对任意的 $g = f_i k \in S$, 我们有 $P(g)(y') = P(k)(P(f_i)(y')) = P(k)(x_i) = y_g$, 故这样的 y 是唯一的.

(充分性) 设 $S \in J(C)$ 是对象 C 的一个覆盖筛, 元素族 $\{x_g \in P(D) \mid g : D \to C \in S\}$ 满足 (2*) 中的条件. 存在 C 的一个覆盖 $R \in K(C)$ 使得 $R \subseteq S$, 则元素子族 $\{x_f \in P(D') \mid f : D' \to C \in R\}$ 是一个相容族. 由题设条件存在唯一的一个元素 $x \in P(C)$ 使得 $P(f)(x) = x_f$ 对任意的 $f \in R$ 成立, 下面我们来说明 $P(g)(x) = x_g$ 对任意的 $g \in S$ 成立即可.

设 $g \in S$, 对任意的 $f \in R$, 考虑由 f 与 g 形成的拉回方形:

$$\begin{array}{ccc} D \times_C D' & \xrightarrow{\rho_{f,g}} & D' \\ {\scriptstyle \pi_{f,g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ D & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

由条件定义 5.5.2 中的 (2*) 可知 $R' = \{\pi_{f,g} \mid f \in R\} \in K(D)$. 考虑到 $\{x_f \in P(D') \mid f : D' \to C \in R\}$ 的相容性, 对任意的 $f \in R$ 都有 $P(\pi_{f,g})(P(g)(x)) = P(\rho_{f,g})(P(f)(x)) = P(\rho_{f,g})(x_f) = x_{f\rho_{f,g}} = x_{g\pi_{f,g}} = P(\pi_{f,g})(x_g)$. 若 $f' : D'' \to C$ 是 R 中的另一个态射, 则由 $\pi_{f,g}$ 和 $\pi_{f',g}$ 形成的拉回方形表明元素族 $\{P(\pi_{f,g})(P(g)(x)) \mid f \in R\}$ 是一个关于覆盖 $R' = \{\pi_{f,g} \mid f \in R\}$ 的相容族, 因此由存在唯一性可知 $P(g)(x) = x_g$ 成立. □

练习 5.5

1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴, 对任意的 $C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, 令 $J(C)$ 是由 C 上最大的筛 $t_C = \{f \mid \mathrm{cod}(f) = C\}$ 构成的单点集. 证明 $\{J(C) \mid C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}\}$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个 Grothendieck 拓扑 (平庸拓扑).

2. 设 $\mathcal{T}$ 是拓扑空间范畴 Top 的一个对有限极限和开子空间运算封闭的小的满子范畴 (如可分的 Hausdorff 拓扑空间范畴). 对任意的 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{T}$, 定义 $\{f_i : Y_i \to X \mid i \in I\} \in K(X)$ 当且仅当每个 Y_i 都是 X 的开子空间, 每个 f_i 都是包含映射并且 $\bigcup_{i\in I} Y_i = X$. 证明 $\{K(C) \mid C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}\}$ 是范畴 $\mathcal{T}$ 上的一个 Grothendieck 拓扑基.

3. 设 L 是一个完备的 Heyting 代数 (即 frame) 看作一个范畴. 对任意的 $c \in L$, 定义 $\{a_i \mid i \in I\} \in K(c)$ 当且仅当 $\bigvee_{i\in I} a_i = c$. 证明 $\{K(c) \mid c \in L\}$ 是范畴 L 上的一个 Grothendieck 拓扑基, 进一步写出由该基生成的 Grothendieck 拓扑.

4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴, 对任意的 $C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, 定义 C 上的筛构成的集合 $J(C)$ 为 $S \in J(C)$ 当且仅当 $S \neq \emptyset$. 证明 $\{J(C) \mid C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}\}$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个 Grothendieck 拓扑当且仅当 $\mathcal{C}$ 上的任意两个态射 $D \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} E$, 存在 $\mathcal{C}$ 中的一个对象 A 以及态射 $A \to D$ 和 $A \to E$ 使得下面的方形交换:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ E & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

5. 设 $\{J_i\}_{i\in I}$ 是小范畴 $\mathcal{C}$ 上的一族 Grothendieck 拓扑, 对任意的 $C \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, 令 $(\bigcap J_i)(C) = \bigcap J_i(C)$, 证明 $\bigcap J_i$ 范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个 Grothendieck 拓扑.

6. 设 J 是小范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个 Grothendieck 拓扑. 定义 $I : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$,

$$I(C) = \begin{cases} \{*\}, & \emptyset \in J(C) \\ \emptyset, & \emptyset \notin J(C) \end{cases}$$

试证明 I 是场 $(\mathcal{C}, J)$ 上的一个层.

参考文献

[1] Adamek J, Herelich H, Strecker G E. Abstract and Concrete Categories, John Wiley and Sons, Inc, 1990

[2] Barr M, Wells C. Category Theory for Computing Science. Prentice Hall, 1990

[3] Bénabou J. Catǵories avec multiplication. C. R. Acad.Sci.Paris 256, 1963, 1887–1890

[4] Bénabou J. Critéres de repeséntablilité des foncteurs. C. R. Acad.Sci.Paris 260, 1965, 752–755

[5] Blass A. The interaction between category theory and set theory. AMS series in Contemporary Mathematics 30, 1984, 5–29

[6] Buchsbaum D A. Exact categories and duality. Trans. Amer. Math. Soc. 80, 1955, 1–34

[7] Buchsbaum D A. Satellites and universal functors. Ann. of Math. 71, 1960, 199–209

[8] Blyth T S. Categories, Longman Group Limited. London and New York, 1986

[9] Cartan H, Eilenberg S. Homological Algebra. Prinston University Press, 1956

[10] Borceux F. Handbook of Categorical Algebra 2 - Categories and Structures. Cambridge University Press, 1994

[11] Eckmann B, Hilton P. Computing limits with colimits. Journal of Algebra 11, 1969, 116–144

[12] Caran H, Eilenberg S. Homological Algebra. Prinston University Press, 1956

[13] Ehresmann C. Catégories et structures. Dunod, 1965

[14] Eilenberg S, Mac Lan S. Natural isomorphisms in group theory. Proc. Nat.Acad. Sci. USA 28, 1942, 537–543

[15] Eilenberg S, Mac Lan S. General theory of natural equivalences. Trans. Amer. Math. Soc. 58, 1945, 231–294

[16] Eilenberg S, Moore J C. Adjoint functors and triples. Illinois J. Math. 9, 1965, 381–398

[17] Freyd P. Abelian Categories. Harper and Row, 1964

[18] Freyd P, Scedrov A. Categories; Allegories. North Holland, 1990

[19] Gabriel P, Zisman M. Calculus of Fractions and Homotopy Theory. Springer, 1967

[20] Gray J. Formal Category Theory I: Adjointness for 2-Categories, Springer LNM 391, 1974

[21] Grothendieck A. Sur quelques points dalgèbre homologique. Tohoku Math. J. 9, 1957, 119–221

[22] Grothendieck A. verdier J L. Préfaisceaux. Springer LNM 269, 1970, 1–218

[23] Herrlich H. Topologische Reflexionen und Coreflexionen. Springer LNM 78, 1968

[24] Huber P J. Standard constructions in abelian categories, Math. Ann. 146, 1962, 321–325

[25] Isbell J. Structure of categories. Bull. Amer. Math Soc. 72, 1966, 619–655

[26] Isbell J. Small subcategories and completeness. Mathematical System Theory 2, 1968, 27–50

[27] Johnstone P T, Sketches of an Elephant—A Topos Theory Compendium. Volume 1. Oxford University Press, 2002

[28] Johnstone P T. Sketches of an Elephant—A Topos Theory Compendium. Volume 2. Oxford University Press, 2002

[29] Kan D. Adjoint functors. Trans. Amer. Math. Soc. 87, 1958, 294–329

[30] Kelley J L. General Topology, Springer, 1975

[31] Kelly G M. Monomorphisms, epimorphisms and pullbacks. J. Aus. Math. Soc. 9, 1969, 124–142

[32] Kelly G M. A unified treatment of transfinite constructions for free algebras, free monoids, colimits, associated sheaves, and so on. Bull. Aus. Math. Soc. 22, 1980, 1–83

[33] Kennison J F. On limit preserving functors. Illinois J. Math. 12, 1968, 616–619

[34] Lambeck J. Completion of Categories. Springer LNM 24, 1966

[35] Lawvere F W. An elementary theory of the category of sets. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 52, 1964, 1506–1511

[36] Lawvere F W, Schanuel S. Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories. Buffalo Workshop Press, 1991

[37] Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician. Springer, Berlin- Heidelberg- New York, 1972

[38] Mac Lane S, Moerdijk I. Sheaves in Geometry and Logic -A First Introduction to Topos Theory. Springer-Verlag, New York- Berlin- Heidelberg- London- Paris, 1992

[39] Mitchell B. Theory of Categories. Academic Press, 1965

[40] Paré R. On absolute colimits. J. Algebra 19, 1971, 80–95

[41] Pareigis B. Categories and Functors. Academic Press, 1970

[42] Popescu N, Popescu L. Theory of Categories. Edtura Academiei, 1979

[43] Schubert H. Categories. Springer, 1970

[44] Spanier E. Algebraic Topology. cGraw-Hill, 1966

[45] Ulmer F, Representable functors with values in arbitrary categories. J. Algebra 8, 1968, 96–129

[46] Watts C E. Intrinsic characterizations of some additive functors. Proc. Amer. Math. Soc. 11, 1960, 5–8

[47] Watts C E. On ext and exact sequences. J. Fac. Sci. Tokyo, Sec. I, 8, 1960, 507–526



索　引

H

J

K

L

M

N

P

Q

S

T

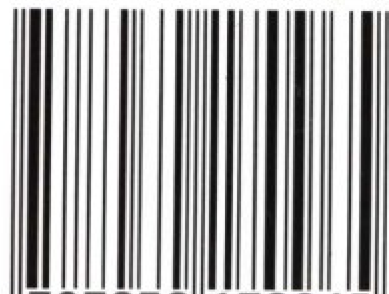
W

X

Y

Z

(O-2482.0101)



销售分类建议：高等数学

ISBN 7-03-017096-2
定 价：22.00 元